复旦大学数学科学学院

2011～2012学年第二学期期末考试试卷

A卷

课程名称：高等数学A（下）　课程代码：MATH120002

开课院系：数学科学学院　考试形式：闭卷

姓　名：______　学　号：______　专　业：______

题　号	1	2	3	4	5	6	7	总　分
得　分								

（装订线内不要答题）

1．（本题满分42分，每小题7分）计算下列各题：

（1）设 $z=\sqrt[4]{\dfrac{x+y}{x-y}}$，求 dz。

（2）求曲线 $(2x+y+1)^2+(x+2y+3)^2=1$ 所围有界区域的面积。

（3）计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$，其中 Ω 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=h$（$h>0$）所围的有界闭区域。

（4）计算第一类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$（$a>0$）。

（5）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$的和函数。

（6）求微分方程$\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}$（$x>0$，$y>0$）的通解。

2．（本题满分 8 分）求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $ax+by+cz=1$ 下的最小值，其中 a， b， c 为常数。

3．（本题满分 10 分）确定常数 λ，使得右半平面 $\{(x,y)\,|\,x>0\}$ 上的向量值函数 $\boldsymbol{r}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并求 $u(x,y)$。

4.（本题满分 10 分）计算第二类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} 2(1-x^2)dydz + 8xydzdx - 4zxdxdy$，其中 Σ 是由 Oxy 平面上的曲线 $x = e^{y^2}$（$0 \le y \le 1$）绕 x 轴旋转一周而成的旋转曲面，且该曲面的法向量与 x 轴正向的夹角不小于 $\frac{\pi}{2}$。

5.（本题满分 10 分）设 $y_n(x)$ 是定解问题 $\begin{cases} x\dfrac{d^2y}{dx^2} - n\dfrac{dy}{dx} = x^{n-1}, \\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0 \end{cases}$ 的解（$n = 2, 3, \cdots$）。

（1）求 $y_n(x)$（$n = 2, 3, \cdots$）；（2）问级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} y_n(0)\ln n$ 是否收敛？请说明理由。

6．（本题满分 12 分）设$0<\varphi<\pi$。（1）求函数$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le\varphi, \\ 0, & \varphi<|x|\le\pi\end{cases}$ 的 Fourier 级数；（2）求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\varphi}{n}$及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\varphi}{n^2}$的和。

7.（本题满分 8 分）已知曲面Σ_1：$Rz = x^2 + y^2 + R^2$和Σ_2：$Rz = x^2 + y^2$（$R > 0$）。证明：Σ_1上任一点处的切平面与曲面Σ_2所围立体的体积与该点的位置无关。