

复旦大学数学科学学院

2016~2017 学年第二学期期末考试试卷

A 卷(共 6 页)

课程名称: 高等数学 A(下)

课程代码: MATH120022

开课院系: 数学科学学院

考试形式: 闭卷

题号	1	2	3	4	5	6	7	总分
得分								

1. (本题共 40 分, 每小题 5 分) 计算下列各题

(1) 设 $z = \arctan \frac{y}{x}$, 求 z''_{xy} 。

(2) 求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程。

(3) 求函数 $u = x^3y^2 + z$ 在点 $(1,0,1)$ 处的最大方向导数。

姓 名: _____ 学 号: _____ 专 业: _____

(装 订 线 内 不 要 答 题)

(4) 求椭圆 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ 的面积。

(5) 计算 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$ 。

(6) 计算 $\iint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dx dy$, 其中 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧。

(7) 求方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} = x$ 的通解。

(8) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-3)^n + 2^n} x^{2n-1}$ 的收敛半径与收敛区间。

2. (本题共 10 分) 将 $f(x) = x^2$ 在 $[0, 2\pi]$ 上展开成 Fourier 级数, 并求其和函数 $S(x)$ 。

3. (本题共 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$ 的和函数 $S(x)$ 。

4. (本题共 10 分) 求 $\iint_D (xy)^{-2} dx dy$, 其中 D 是由 $y = x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$ 以及 $x = \frac{1}{4}y^2$ 所围成的区域。

5. (本题共 10 分) 证明不等式: 当 $x \geq 1$, $y \geq 0$ 时, $e^y + x \ln x - x - xy \geq 0$ 。

6. (本题共 10 分) 设 $z = f(x, y)$ 在 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上有连续的偏导数, 且在 $x^2 + y^2 = 1$ 上恒

为零, 证明: $f(0,0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\pi} \iint_{D(\varepsilon)} \frac{xf'_x + yf'_y}{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 $D(\varepsilon)$ 为圆环区域

$\varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ 。

7. (本题共 10 分) 设 $z = f(x, y)$ 在 R^2 上具有连续的二阶偏导数。证明:

1) 若 $z = f(x, y)$ 变量可分离, 即存在连续可导函数 $\varphi(x)$, $\psi(y)$ 使得

$$f(x, y) \equiv \varphi(x)\psi(y), \text{ 则 } z = f(x, y) \text{ 满足 } z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y};$$

2) 若 $z = f(x, y) > 0$, 且满足 $z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}$, 则 $z = f(x, y)$ 变量可分离。