复旦大学数学科学学院

2013～2014 学年第二学期期末考试

高数 A（下）A 卷参考答案

一、1、 $\sin(x+y)+x\cos(x+y)$， $\cos(x+y)-x\sin(x+y)$.

2、 $2x+y+z=\sqrt{3}$.

3、 $\frac{1}{48}$.

4、收敛半径为 $R=2$，收敛域 $(-2,2)$.

5、通解为 $y=\frac{1}{2}x^3+Cx$.

6、 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x.$

7、 π

8、 $f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$， $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

二、（1）驻点（0,0），f(0,0)=2.

（2）在椭圆域边界椭圆上，最大值为 3（x=1,-1,y=0 时），最小值为-2（x=0,y=2,-2 时）。

综上，最大值 3，最小值-2.

三、 $\frac{7\pi}{12}$.

四、 $S(x)=\frac{3-x}{(1-x)^3}$.

五、 $f(x)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}x^{2n}$，

$f^{(0)}(0)=1$， $f^{(2k-1)}(0)=0$， $f^{(2k)}(0)=\frac{2(-1)^{k-1}}{4k^2-1}(2k)!$ $(k=1,2,\cdots,)$.

六、（1） $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\cos yf'(e^x\cos y)+e^{2x}\cos^2 yf''(e^x\cos y)$ ，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x\cos yf'(e^x\cos y)+e^{2x}\sin^2 yf''(e^x\cos y)\text{；}$$

（2） $f(u)=\dfrac{1}{2}e^{2u}-\dfrac{1}{2}e^{-2u}-2u$.

七、证明

（1）由 Lagrange 中值定理，$\exists\xi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得

$$\cos a_m-a_m-(\cos a_n-a_n)=(-\sin\xi-1)(a_m-a_n)\text{，}$$

于是　$|\cos b_m-\cos b_n|\ge|a_m-a_n|$，$|a_m-a_n|\le|b_m-b_n|$，

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，可知$b_n\to 0(n\to\infty)$，根据 Cauchy 收敛原理，$\{a_n\}$收敛，记

$a_n\to a(n\to\infty)$，$a\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

在$\cos a_n-a_n=\cos b_n$中令$n\to\infty$，得 $\cos a-a=1$，则$a=0$。

另证：记函数$F(x,y)=\cos y-y-\cos x$，则$F_y'=-\sin y-1\ne 0$，$y\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，由隐函数存在定理，方程$F(x,y)=\cos y-y-\cos x=0$可在$[0,\ \delta]$确定一个隐函数

$y=f(x)$，它在$[0,\ \delta]$上连续，于是在$\cos a_n-a_n=\cos b_n$中令$n\to\infty$，得

$\cos f(0)-f(0)=1$，则$f(0)=0$，即$a_n\to 0(n\to\infty)$。

（2）由$\dfrac{1-\cos a_n}{a_n}+1=\dfrac{1-\cos b_n}{a_n}$，及$a_n\to 0(n\to\infty)$，可得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos b_n}{a_n}=1$，

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n^2}{2a_n}=1$，或$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{a_n}{b_n}}{b_n}=\dfrac{1}{2}$，由比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$收敛。