

复旦大学数学科学学院

2007~2008 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称: 高等数学 A (上) 课程代码: MATH120001

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓 名: _____ 学 号: _____ 专 业: _____

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									

1. (本题共四小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

(1) 求函数 $f(x) = e^x \sin 2x$ 的一阶和二阶导函数;

(2) 设 $y = y(x)$ 是由方程 $xy - \ln y = 1$ 所确定的隐函数, 求 $y'(0)$;

(3) 求不定积分 $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt[3]{\tan x}}$;

(4) 求广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$.

2. (本题共四小题, 每小题5分, 共20分)

(1) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩;

(2) 设 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 X ;

(3) 设 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ d & e & f \\ b & \frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}$ 为正交阵, 求 a, b, c, d, e, f , 其中 $f > 0$;

(4) 求 R^3 中向量 $\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 在基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的坐标向量。

3. (本题 10 分) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-ax}{1+ax} \right)^{\frac{2}{x}} = \int_a^{+\infty} x e^{-4x} dx$, 求 a .

4. (本题 10 分) 在一个底圆半径为 R , 高为 H 的圆锥体中作内接圆柱, 圆柱的一个底面位于锥体的底面上, 求圆柱体的最大体积。

5. (本题 10 分) 当 a, b 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_3 + (a-3)x_4 = b \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

无解, 有唯一解, 有无穷组解, 并在有无穷组解时求出它的通解。

6. (本题 10 分) 设 A 是三阶不可逆的实对称阵, 特征值为 $1, 2, \lambda$, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

分别是 A 相应于特征值 $1, 2$ 的特征向量, (1) 求 λ , (2) 求相应于特征值 λ 的特征向量, (3) 求矩阵 A 。

7. (本题10分) 设向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 R^n 的基, 其中 $n > 1$,

$$\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \beta_2 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \dots, \beta_{n-1} = (n-1)\alpha_{n-1} + n\alpha_n, \beta_n = n\alpha_n + \alpha_1$$

(1) 求向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 的秩。

(2) 设 \mathcal{A} 是 R^n 上的线性变换, $\mathcal{A}\alpha_i = \beta_i$, \mathcal{A} 在基 $\{\alpha_i \mid i=1, 2, \dots, n\}$ 下的表示阵为 A , 求 $\text{rank}(A^*)$, 其中 A^* 是 A 的伴随阵。

8. (本题 10 分) 设水平放置着一根长为 L , 密度为 ρ 的均匀细棒,

(1) 如其左端的垂线上与棒相距 l 处有一质量为 m 的质点, 求棒对质点的引力 (设引力常数为 k);

(2) 如在棒左端的垂线上放置另一根密度为 ρ 的均匀细棒, 其两端与水平放置细棒的距离分别为 L 和 $2L$, 求两棒间的引力。