（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2011～2012 学年第二学期期末考试试卷

《高等数学 A》（下）试题（答案）

1.（本题满分 42 分，每小题 7 分）（1） $\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{x+y}{x-y}}\,\frac{xdy-ydx}{x^2-y^2}$；（2） $\frac{\pi}{3}$；（3） $\frac{\pi h^3}{6}$；

（4） $\frac{4\pi}{3}a^4$；（5） $(1+x)e^x-1$， $x\in(-\infty,+\infty)$；（6） $y=x^4\left(C+\frac{1}{2}\ln x\right)^2$。

2.（本题满分 8 分）在点 $\left(\frac{a}{a^2+b^2+c^2},\frac{b}{a^2+b^2+c^2},\frac{c}{a^2+b^2+c^2}\right)$ 取最小值 $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$。

3.（本题满分 10 分） $\lambda=-1$， $u(x,y)=-\arctan\frac{y}{x^2}+C$。

4.（本题满分 10 分） $2\pi(e^2-1)$。

5.（本题满分 10 分）（1） $y_n(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n}x^n+\frac{1}{n(n+1)}$ （ $n=2,3,\cdots$ ）。

（2）级数 $\sum_{n=2}^{\infty}y_n(0)\ln n$ 收敛。

6.（本题满分 12 分）（1） $f(x)\sim\frac{\varphi}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n}\cos nx$；

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\varphi}{n}=\frac{\pi}{2}-\varphi$， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\varphi}{n^2}=\frac{1}{2}\varphi(\pi-\varphi)$。

7.（本题满分 8 分）**证** 对于 Σ_1 上任一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$， Σ_1 在 P_0 点处的切平面 Π_0 的方程为

$$2x_0x+2y_0y-Rz+(R^2-x_0^2-y_0^2)=0。$$

Π_0 与 Σ_2 的交线为

$$\begin{cases}2x_0x+2y_0y-Rz+(R^2-x_0^2-y_0^2)=0,\\ Rz=x^2+y^2,\end{cases}$$

它在 Oxy 平面的投影曲线为

$$\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,\\ z=0.\end{cases}$$

记这个投影曲线所围区域为D，则平面Π_0与曲面Σ_2所围立体的体积为

$$V=\iint_D\left[\frac{1}{R}(2x_0x+2y_0y-x_0^2-y_0^2+R^2)-\frac{1}{R}(x^2+y^2)\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{R}\iint_D\left[R^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2\right]dxdy.$$

作变量代换

$$x=x_0+r\cos\theta\text{，}\quad y=y_0+r\sin\theta\text{，}$$

则D对应于$D_1=\{(r,\theta)\mid 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le R\}$，于是

$$V=\frac{1}{R}\iint_{D_1}(R^2-r^2)rdrd\theta=\frac{1}{R}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R(R^2-r^2)rdr=\frac{1}{2}\pi R^3\text{。}$$

这说明平面Π_0与曲面Σ_2所围立体的体积与点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的位置无关。