复旦大学数学科学学院

2017～2018学年第一学期期末考试试卷

A 卷（参考答案）

课程名称： 高等数学A（上） **课程代码：** MATH120021

开课院系： 数学科学学院 **考试形式：** 闭卷

题　目	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得　分									

一、计算(每题6分，共18分)

1. e^5.

2. xe^x+ne^x.

3. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-1-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3x^4}{8}+o(x^4)$,

$\arccos x=\dfrac{\pi}{2}-x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$.

二、计算下列各题(每题6分，共18分)

1. $x_t=1+\cos t$, $y_t=\dfrac{1}{(1+3y^2)(1+t^2)}$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{(1+\cos t)(1+3y^2)(1+t^2)}$

2.原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}ke^{k/n}=0\times\int_0^1 xe^x dx=0.$

3.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{g}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-f'(x)}{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-f''(x)}{f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)}\\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

三、计算下列积分(每题8分，共24分)

1. $\dfrac{1}{2}\Big((x+1)\sqrt{(x+1)^2+1}+\ln\big((x+1)+\sqrt{(x+1)^2+1}\big)\Big)+C$

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+2a\cos\theta+a^2}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{1+2a\cos\theta+a^2}=\frac{2\pi}{a^2-1}$ （采用变换$t=\tan\frac{\theta}{2}$时, $\theta=\pi$及$\theta=-\pi$分别对应于$x=+\infty$及$x=-\infty$。）

3. $\frac{1}{2}B(b-\frac{a+1}{2},\frac{a+1}{2})$

四、(8分)

解：设平面 Σ 的方程为 $x(1+\mu)+y(3-\mu)+z(1+2\mu)=0$, 于是

$$\frac{\Big(3(1+\mu)+(1+2\mu)\Big)^2}{\Big((1+\mu)^2+(3-\mu)^2+(1+2\mu)^2\Big)10}=\frac{1}{4}$$

整理得到

$$\frac{\Big(4+5\mu\Big)^2}{6\mu^2+11}=\frac{5}{2},$$

并解得

$$\mu=-2\pm\frac{\sqrt{515}}{10}.$$

五、(8分)

解：(1)曲线的平面直角坐标系下方程为$x^2+y^2=a\sqrt{x^2+y^2}+ax$,于是 Σ的方程为

$$x^2+y^2+z^2=a\sqrt{x^2+y^2+z^2}+ax;$$

(2) 曲线的参数方程为：$x=a(1+\cos\theta)\cos\theta$, $y=a(1+\cos\theta)\sin\theta$,弧长微元为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{r^2+(r')^2} \\ &= \sqrt{2}a\sqrt{1+\cos\theta}d\theta, \end{aligned}$$

Σ的面积为

$$\int_0^\pi 2\pi y ds=\int_0^\pi 2\sqrt{2}\pi a^2(1+\cos\theta)^{3/2}\sin\theta d\theta=\frac{32\pi a^2}{5}.$$

六、(8分)

解：第一步 曲线$y=a^x$与直线$y=x$有交点当且仅当存在$x^{1/x}=a$有解。 于是问题转化为求函数$f(x)=x^{1/x}$, $x\in(0,+\infty)$的值域。

第二步 由$f'(x)=x^{1/x}\frac{1}{x^2}(1-\ln x)=0$求得驻点$x_0=e$。

第三步 由$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ 及 $\lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$（这两式可用L'Hospital法则求得）得到$f(0+)=0$, $f(+\infty)=1$。

综合第二、三步，可得$f(0,+\infty)=(0,e^{1/e}]$。于是当$a\in(0,e^{1/e}]$时曲线$y=a^x$与直线$y=x$必有交点。

另解：考虑函数$f(x)=a^x-x,\ x\in R^1$。分两种情形讨论。

情形一：当$0<a\le 1$时，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, 于是$f(x)=0$必有解。

情形二：当$a>1$时，先求驻点方程:$f'(x)=a^x\ln a-1=0$, 得到驻点为$x_0=-\dfrac{\ln\ln a}{\ln a}$。

又因为$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, 于是曲线$y=a^x$与直线$y=x$有交点当且仅当 $f(x_0)\le 0$。 再由$f(x_0)\le 0$解得$a\le e^{1/e}$。综上,最后结论为当$a\in(0,e^{1/e}]$时曲线$y=a^x$与直线$y=x$必有交点。

（【注】鉴于中学教材在函数$y=a^x$的定义中要求$a\neq 1$，答案若为“$a\in(0,e^{1/e}],\ a\neq 1$”亦可。）

七、(8分)

证：（1）由已知得到 $0\le f(x)\le\dfrac{1}{x^2+3}$, 于是 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛，且

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx\le\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+3}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

（2）分两种情况：（A）$x_1\neq 0$, 则

$$x_2\le\int_0^{x_1}\frac{dx}{x^2+3}\le x_1,$$

利用归纳法可证，

$$x_{n+1}-x_n=\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x)dx\le 0,$$

另一方面，

$$0\le x_n\le\int_0^{+\infty}f(x)dx\le\frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$

于是可得结论。另一种情况，（B）$x_1=0$, 结论显然。

八、(8分)

解：（1）

$$g(x)=|A|+x\begin{vmatrix}1&a_{12}&a_{13}\\1&a_{22}&a_{23}\\1&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}a_{11}&1&a_{13}\\a_{21}&1&a_{23}\\a_{31}&1&a_{33}\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&1\\a_{21}&a_{22}&1\\a_{31}&a_{32}&1\end{vmatrix},$$

$g'(x) = \sum\limits_{1\le k,j\le 3} A_{kj}$，其中$A_{kj}$为$|A|$中相应于$(k,j)$元的代数余子式，再利用$A^* = |A|A^{-1}$可得$g'(0)$的表示式。

（2）经计算可得 $|A| = -1$及

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

代入即得$g'(0) = 1$。

或者：

$$g'(0) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$