2009 级高等数学 A(上)期末试题解答

一（1）解： $y'=\sin^2 2x+2x\sin 4x$， $y''=4\sin 4x+8x\cos 4x$。

（2）解：原式$=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx+\int\frac{1}{x^2+2x+2}dx$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2)+\arctan(x+1)+c。$$

（3）解：原式$=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}}dx=-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}})\Big|_0^{+\infty}=\ln(1+\sqrt{2})$。

（4）解：原式$=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\tan 2x}\ln(1+t^2)dt}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan^2 2x)\cdot 2\sec^2 2x}{3x^2}$。

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{x^2}=\frac{8}{3}。$$

二（1）解： $\begin{pmatrix}1&-2&2&1\\-2&1&2&1\\2&2&-8&-4\\1&4&-10&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，所以 $r(A)=2$。

（2）解： $(\mathrm{A}-2I)\mathrm{B}=\mathrm{A}$， $A-2I=\begin{pmatrix}-1&2&3\\-1&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}$， $(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&7&3\\1&-5&-2\end{pmatrix}$，

所以 $B=(A-2I)^{-1}A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&15&6\\2&-10&-3\end{pmatrix}$。

（3）解：由题意，齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系含有两个线性无关的向量，

易知 $x^{(2)}-x^{(1)}=(1,-3,2,1)^T$, $x^{(3)}-x^{(1)}=(2,0,-1,-1)^T$ 为 $Ax=0$ 的两个线性无关的向量，所以原方程组的通解为

$x=c_1(1,-3,2,1)^{\mathrm{T}}+c_2(2,0,-1,-1)^{\mathrm{T}}+(3,2,-2,1)^{\mathrm{T}}$。（$c_1,c_2$ 为任意常数）

（4）解： A 为正交阵，则 A 的列向量为单位向量且两两正交，

于是 $a=\pm 1, b=0, c=0, d=\pm 1, e=0, f=\pm 1$

三解：当$0 \le t < \pi$时，$f(t) = \int_0^t (t-x)\sin x dx + \int_t^\pi (x-t)\sin x dx$

$= \pi - 2\sin t$；

当$\pi \le t \le 2\pi$时，$f(t) = \int_0^\pi (t-x)\sin x dx = 2t - \pi$。

所以当$t = 2\pi$时，f取到最大值，$f_{\max} = 3\pi$，

当$t = \frac{\pi}{2}$时，f取到最小值，$f_{\min} = \pi - 2$。

四解：$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & b \\ 3 & 2 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b+8 \\ 0 & 0 & 0 & -8-2a & 2-\frac{1}{2}(a+3)(b+8) \end{pmatrix}$，

当$a = -4$且$b \ne -12$时，$r(A) = 3 < 4 = r(A|b)$，方程组无解。

当$a \ne -4$时，方程组有唯一解。

当$a = -4$且$b = -12$时，方程组有无穷多解，通解为

$x = (-5, 3, -2, 0)^T + c(2, 3, 2, -1)^T$。（$c$为任意常数）

五证：A 有特征值$1, -1, 2$，则A 可对角化，即存在可逆阵P，使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

注意到 $(A^2 - I)(A-2) = A^3 - 2A^2 - A + 2I$有特征值 0（三重根），

可得 $P^{-1}(A^3 - 2A^2 - A + 2I)P = O$，

所以 $A^3 - 2A^2 - A + 2I = O$，或 $\frac{1}{2}(I + 2A - A^2)A = I$，

即 A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{1}{2}(I + 2A - A^2)$。

六解：任取$x,x+dx\in[0,2]$，小段细棒的长度记为ds，则$ds=\sqrt{2}dx$，小段细棒对质点的引力大小为 $dF=G\dfrac{\rho ds}{r^2}$，

其中$\rho=\dfrac{m}{2\sqrt{2}},r^2=x^2+y^2=x^2+(2-x)^2$。

x方向分引力$dF_x=G\dfrac{\rho x ds}{r^3}=\dfrac{Gm}{2}\cdot\dfrac{xdx}{(2x^2-4x+4)^{\frac{3}{2}}}$，

y方向分引力$dF_y=G\dfrac{\rho y ds}{r^3}=\dfrac{Gm}{2}\cdot\dfrac{(2-x)dx}{(2x^2-4x+4)^{\frac{3}{2}}}$。

于是 $F_x=\dfrac{Gm}{4\sqrt{2}}\int_0^2\dfrac{xdx}{(x^2-2x+2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{Gm}{4}$，

由对称性，$F_y=\dfrac{Gm}{4}$，

所以细棒对这质点的引力为 $F=\dfrac{Gm}{4}(1,1)$。

七解：（1）设有数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$使$\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\beta_3=0$，即$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关，

又任取$\alpha=\begin{pmatrix}\mathrm{a}&\mathrm{b}\\ \mathrm{b}&\mathrm{c}\end{pmatrix}\in\mathrm{V}$，有$\alpha=(\mathrm{a}-\mathrm{b})\beta_1+(\mathrm{b}-\mathrm{c})\beta_2+\mathrm{c}\beta_3$，

从而 β_1,β_2,β_3是V的一组基。

（2）由$\beta_1=\alpha_1$， $\beta_2=\alpha_1+\alpha_3$， $\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

可得 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，

即基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$。

（3）由$\mathcal{A}(\beta_1)=\beta_1+\beta_2$，$\mathcal{A}(\beta_2)=\beta_1+\beta_2+\beta_3$，$\mathcal{A}(\beta_3)=\beta_1+2\beta_2+2\beta_3$，

可得 $\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$，

即 $\mathscr{A}$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的表示矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$。

八（1）解：$g'(x)=\dfrac{(x-1)f'(x)-f(x)}{(x-1)^2}$，$g''(x)=\dfrac{(x-1)^2f''(x)-2(x-1)f'(x)+2f(x)}{(x-1)^3}$。

（2）证：令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$， $x\in[0,1)$，只要证 $g(x)=1+x+\dfrac{1}{6}f'''(\xi)x^2,\ \xi\in(0,1)$ 即可。

易知 $g(0)=1, g'(0)=1$，

于是 $g(x)=1+x+\dfrac{1}{2}g''(\eta)x^2,\eta\in(0,1)$。

另一方面，注意 $g''(x)$ 的分子和分母当 $x=1$ 时均为零，对分子和分母

这两个函数在 $[\eta,1]$ 上运用 Cauchy 中值定理，即得

$$g''(\eta)=\frac{1}{3}f'''(\xi),\quad \xi\in(\eta,1),$$

所以 $g(x)=1+x+\dfrac{1}{6}f'''(\xi)x^2,\ \xi\in(0,1)$。