考前绝对保密！

复旦大学数学科学学院

2007～2008 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称：高等数学 A（上）　　课程代码：$MATH120001$

开课院系：数学科学学院　　考试形式：　闭卷

姓　名：＿＿＿＿＿＿　学　号：＿＿＿＿＿＿　专　业：＿＿＿＿＿＿

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									

1.（本题共四小题，每小题 5 分，共 20 分）

（1）求函数 $f(x)=e^x\sin 2x$ 的一阶和二阶导函数；

解．$f'(x)=e^x(\sin 2x+2\cos 2x)$

$f''(x)=e^x(-3\sin 2x+4\cos 2x)$

（2）设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy-\ln y=1$ 所确定的隐函数，求 $y'(0)$；

解．$0\cdot y(0)-\ln y(0)=1$，$\therefore\ y(0)=\frac{1}{e}$

$y+xy'-\frac{y'}{y}=0$，　$x=0$ 时　$\frac{1}{e}-ey'(0)=0$

$\therefore\ y'(0)=\frac{1}{e^2}$

（3）求不定积分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt[3]{\tan x}}$；

解．原积分 $=\int \tan^{-\frac{1}{3}}x\, d\tan x=\frac{3}{2}\tan^{\frac{2}{3}}x+C$

（4）求广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$ 。

解．原积分 $=-\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}$

$=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$

$=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$

2.（本题共四小题，每小题 5 分，共 20 分）

（1）求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\2&1&1&0&1\\3&1&4&1&3\end{pmatrix}$ 的秩；

解 $A=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\2&1&1&0&1\\3&1&4&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\2&1&1&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，第一、二行线性无关

$\mathrm{rank}\, A=2$

（2）设 $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}2&5\\0&3\end{pmatrix}=12\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，求 X；

解 $X=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}10&7\\12&9\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&7\\12&9\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6&3\\12&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$

（3）设 $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&a\\d&e&f\\b&\frac{1}{\sqrt{2}}&c\end{pmatrix}$ 为正交阵，求 a,b,c,d,e,f，其中 $f>0$；

解. 由 $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+a^2=1$，得 $a=0$.

由 $\frac{b}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+c\cdot 0=0$，得 $b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

由 $(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+c^2=1$，得 $c=0$.

由 $0^2+f^2+0^2=1$，$f>0$，得 $f=1$. 由 $d^2+e^2+1=0$，得 $d=e=0$.

（4）求 R^3 中向量 $\xi=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ 在基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 下的坐标向量。

解

设 $\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}\xi=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

3.（本题 10 分）设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-ax}{1+ax}\right)^{\frac{2}{x}}=\int_a^{+\infty} xe^{-4x}dx$，求 a。

解. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-ax}{1+ax}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{2ax}{1+ax}\right)^{-\frac{1+ax}{2ax}\cdot\frac{-4a}{1+ax}}=e^{-4a}$

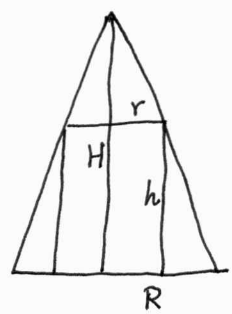
$$\int_a^{+\infty} xe^{-4x}dx=-\frac{x}{4}e^{-4x}\Big|_a^{+\infty}+\frac{1}{4}\int_a^{+\infty}e^{-4x}dx$$

$$=\frac{a}{4}e^{-4a}+\frac{1}{16}e^{-4a}$$

$\therefore \dfrac{a}{4}+\dfrac{1}{16}=1$，　$a=\dfrac{15}{4}$

4.（本题 10 分）在一个底圆半径为 R，高为 H 的正圆锥体中作内接正圆柱，圆柱的一个底面位于锥体的底面上，求圆柱体的最大体积。

解. 设圆柱的底半径为 r，高为 h，则



$\dfrac{r}{R}=\dfrac{H-h}{H}$，　$h=\left(1-\dfrac{r}{R}\right)H$

$V(r)=\pi r^2 h=\dfrac{\pi H}{R}(Rr^2-r^3)$　　$r\in(0,R)$

$V'(r)=\dfrac{\pi H}{R}(2Rr-3r^2)$

$V'(r)=0$ 时 $r=\dfrac{2}{3}R$.

$V''\left(\frac{2}{3}R\right)=\dfrac{\pi H}{R}(2R-6r)\Big|_{r=\frac{2}{3}R}=-2\pi H<0$.　$\therefore r=\frac{2}{3}R$ 为极大值点.

因为在 $(0,R)$ 中 $V(r)$ 仅一个极值点，此极值点即最值点.

$V\left(\frac{2}{3}R\right)=\dfrac{4}{27}\pi R^2 H$.

5. （本题 10 分）当 a,b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_3+2x_4=1 \\ -x_1-2x_3+(a-3)x_4=b \\ 2x_1+3x_2+ax_3+x_4=-1 \end{cases}$ 无解，有唯一解，有无穷组解，并在有无穷组解时求出它的通解。

解. 作增广阵行变换：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & a-3 & b \\ 2 & 3 & a & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b+1 \\ 0 & 1 & a-2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b+1 \end{pmatrix}$ $\therefore$ $a\neq 1$，方程组有唯一解

$a=1$，$b\neq -1$，$\operatorname{rank}(A\ b)\neq \operatorname{rank} A$，方程组无解.

$a=1$，$b=-1$ 时，继续作行变换，得

上述矩阵 $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，由此，得非齐次方程组通解为

$x=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6.（本题 10 分）设 A 是三阶不可逆的实对称阵，特征值为 $1,2,\lambda$，$\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 分别是 A 相应于特征值 1，2 的特征向量，（1）求 λ，（2）求相应于特征值 λ 的特征向量，（3）求矩阵 A。

解.(1) 因 A 不可逆，故 $\det A=0$，从而 $\lambda=0$

(2) 解 $\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 由 $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

故得相应于特征值 0 的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(3) 由 A 的特征向量为列向量得正交阵 $Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt3} & -\frac{2}{\sqrt6} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$,

$A=Q\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}Q^T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7.（本题10分）设向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 R^n 的基，其中 $n>1$，

$$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2,\beta_2=2\alpha_2+3\alpha_3,\cdots,\beta_{n-1}=(n-1)\alpha_{n-1}+n\alpha_n,\beta_n=n\alpha_n+\alpha_1$$

（1） 求向量组 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 的秩。

解 设 $\sum_{i=1}^{n}c_i\beta_i=0$，即 $c_1(\alpha_1+2\alpha_2)+c_2(2\alpha_2+3\alpha_3)+\cdots+c_n(n\alpha_n+\alpha_1)=0$.

因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，故

$$\begin{cases} c_1+c_n=0 \\ 2c_1+2c_2=0 \\ \cdots \\ nc_{n-1}+nc_n=0 \end{cases},\quad 记\ A=\begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ 2 & 2 & & & \\ & 3 & 3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & n-1 & \\ & & & n & n \end{pmatrix}$$

则 $\det A=\begin{vmatrix} 2 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & n \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & n \end{vmatrix}=[1+(-1)^{n+1}]n!$

$\therefore$ n 为奇数时，$\det A\neq 0$，$c_1=\cdots=c_n=0$，$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性无关，

此时，$\mathrm{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_n)=n$

n 为偶数时，$\det A=0$，故 $AC=0$ 有非零解，即 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性相关，

但 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$ 线性无关，此因若

$$c_1(\alpha_1+2\alpha_2)+c_2(2\alpha_2+3\alpha_3)+\cdots+c_{n-1}[(n-1)\alpha_{n-1}+n\alpha_n]=0,$$

则 $c_1\alpha_1+(2c_1+2c_2)\alpha_2+\cdots+(n-1)(c_{n-2}+c_{n-1})\alpha_{n-1}+nc_{n-1}\alpha_n=0$.

由递推得 $c_1=c_2=\cdots=c_{n-1}=0$，故 $\mathrm{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_n)=n-1$.

（2）设 $\mathscr{A}$ 是 R^n 上的线性变换，$\mathscr{A}\alpha_i=\beta_i$，$\mathscr{A}$ 在基 $\{\alpha_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$ 下的表示阵为 A，求

$rank(A^*)$，其中 A^* 是 A 的伴随阵。

解. $(\mathscr{A}\alpha_1\cdots\mathscr{A}\alpha_n)=(\beta_1\cdots\beta_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A$.

n 为奇数时 $\mathrm{rank}\,A=n$，故 $\mathrm{rank}\,A^*=n$

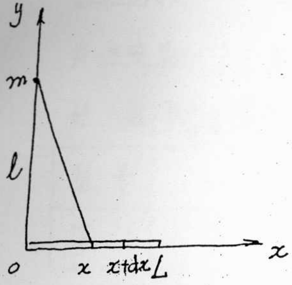
n 为偶数时，$\mathrm{rank}\,A=n-1$，因此 $Ax=0$ 的基础解

系含 $n-(n-1)=1$ 个元素，而 $AA^*=0$，$A^*\neq 0$，故

A^* 列向量组的秩为 1，从而 $\mathrm{rank}\,A^*=1$.

8.（本题10分）设水平放置着一根长为L，密度为ρ的均匀细棒，

（1）如在其左端的垂线上与棒相距l处有一质量为m的质点，求棒对质点的引力（设引力常数为k）；



解. 取坐标系如图. 引力微元 $|dF|=\dfrac{km\rho dx}{x^2+l^2}$

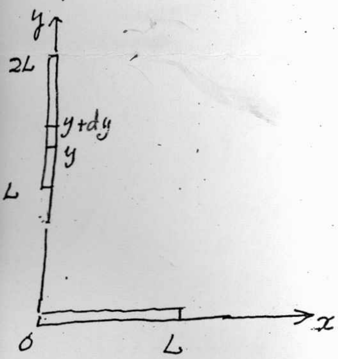
$$dF_x=\frac{km\rho dx}{x^2+l^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}},\quad dF_y=\frac{km\rho dx}{x^2+l^2}\frac{l}{\sqrt{x^2+l^2}}$$

$$F_x=km\rho\int_0^L\frac{x\,dx}{(x^2+l^2)^{3/2}}=km\rho\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{\sqrt{l^2+L^2}}\right)$$

$$F_y=km\rho\int_0^L\frac{l\,dx}{(x^2+l^2)^{3/2}}=\frac{km\rho L}{l\sqrt{l^2+L^2}}$$

（2）如在棒左端的垂线上放置另一根密度为ρ的均匀细棒，其两端与水平放置细棒的距离分别为L和$2L$，求两棒间的引力。

解



由上一小题, 对位于垂线上的细杆微元

$$dF_x=k\rho^2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{\sqrt{y^2+L^2}}\right)dy$$

$$dF_y=k\rho^2\frac{L}{y\sqrt{y^2+L^2}}dy$$

$$F_x=k\rho^2\int_L^{2L}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{\sqrt{y^2+L^2}}\right)dy$$

$$=k\rho^2\left[\ln y-\ln\left(y+\sqrt{y^2+L^2}\right)\right]\Big|_L^{2L}$$

$$=k\rho^2\ln\frac{2+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{5}}$$

$$F_y=\int_L^{2L}\frac{k\rho^2L\,dy}{y\sqrt{y^2+L^2}}=-k\rho^2\int_L^{2L}\frac{d\left(\frac{L}{y}\right)}{\sqrt{1+\frac{L^2}{y^2}}}$$

$$=-k\rho^2\ln\left(\frac{L}{y}+\sqrt{1+\frac{L^2}{y^2}}\right)\Big|_L^{2L}=k\rho^2\ln\frac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}$$

注 在解题过程中,如果学生将两根细杆放置如下图,只要列式正确,也应合理得分(此时引力两分量表示为广义积分,对计算过程和结果可酌情处理).