（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2015～2016 学年第一学期期末考试试卷

《高等数学 A（I）》（MATH120021）试题答案

1．（本题满分 40 分，每小题 5 分）（1） ± 16；（2） $\dfrac{2}{3}$；

（3）在 $(-1,\mathrm{e}^{-1}-1]$ 上单调减少，在 $[\mathrm{e}^{-1}-1,+\infty)$ 上单调增加； $f(\mathrm{e}^{-1}-1)=-\mathrm{e}^{-1}$ 为极小值；

（4）$\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x^2}{2}+C$；（5）$\mathrm{e}^{-2}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2$；（6）收敛；（7）$\begin{pmatrix}14 & 8 & 3\\ 8 & 5 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$；（8）$x-2y+z=0$ 。

2．（本题满分 10 分）3 个。

3．（本题满分 10 分）底面半径和高均为 $\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$ 。

4．（本题满分 10 分）（1） $f(x)=28x^6+cx$（ c 为任意常数）；（2）无拐点；

（3）不存在。

5．（本题满分 10 分） $A=2$， $B=1$， $C=\dfrac{5}{4}$。

6．（本题满分 10 分）（1）证；由 $\sin x\ge\dfrac{2}{\pi}x$（ $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ ）知 $\sin\dfrac{\pi}{2}x\ge x$（ $0\le x\le 1$），

所以

$$\int_0^1\left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n\mathrm{d}x\ge\int_0^1(1+x)^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_0^1=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\text{ 。}$$

（2）由于

$$\frac{2^n}{n+1}<\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\le\int_0^1\left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n\mathrm{d}x\le\int_0^1(1+1)^n\,\mathrm{d}x=2^n\text{ ，}$$

利用极限的夹逼性可得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1\left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}=2\text{ 。}$$

7．（本题满分 10 分）（1）L 的方向向量可取为

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ c & 1 & 1 \\ 1 & -c & c \end{vmatrix} = 2c\boldsymbol{i} + (1-c^2)\boldsymbol{j} - (1+c^2)\boldsymbol{k}，$$

因此 L 的对称式方程为

$$\frac{x+1}{2c} = \frac{y-c}{1-c^2} = \frac{z-c}{-1-c^2}。$$

（2）在以上方程中令 $z=t$，得

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2ct+(c^2-1)}{1+c^2}, \\ y = \dfrac{2c+(c^2-1)t}{1+c^2}, \\ z = t, \end{cases}$$

这就是曲面 Σ 与平面 $z=t$ 的交线的参数方程，其中 c 为参数。

进一步，从上式知

$$\begin{cases} x = A - Bt, \\ y = At + B, \end{cases}$$

其中 $A = \dfrac{c^2-1}{1+c^2}$， $B = \dfrac{2c}{1+c^2}$。显然 $A^2+B^2=1$，于是

$$x^2+y^2 = A^2(1+t^2)+B^2(1+t^2) = 1+t^2，$$

因此曲面 Σ 与平面 $z=t$ 的交线的方程又可表为

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1+t^2, \\ z = t. \end{cases}$$

（3） 从（2）可知，过 $(0,0,z)$ 点且与 Oxy 平面平行的平面截由曲面 Σ，平面 $z=0$ 和 $z=1$ 所围立体的截面均为圆，其面积为

$$A(z) = \pi(1+z^2)，$$

因此该立体的体积为

$$V = \int_0^1 A(z)\mathrm{d}z = \pi\int_0^1 \left(1+z^2\right)\mathrm{d}z = \frac{4\pi}{3}。$$