# 复旦大学数学科学学院

# 2016～2017 学年第二学期期末考试试卷

# A 卷

课程名称：高等数学 A(下)　　课程代码：MATH120022

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

| 题 号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 总 分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得 分 | | | | | | | | |

姓 名：　　学 号：　　专 业：

（装订线内不要答题）

1. (本题共 40 分，每小题 5 分) 计算下列各题

(1) 设 $z = \arctan\dfrac{y}{x}$，求 $z''_{xy}$。

解：$z'_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$z''_{xy} = \dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$。

(2) 求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程。

解：记 $F(x,y,z) = e^z - z + xy - 3$，$\nabla F(x,y,z) = (y, x, e^z - 1)$，$\nabla F(2,1,0) = (1,2,0)$，

切平面方程为 $x + 2y - 4 = 0$。

(3) 求函数 $u = x^3y^2 + z$ 在点 $(1,0,1)$ 处的最大方向导数。

解：$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,0,1)} = 0$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,0,1)} = 0$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,0,1)} = 1$；$\nabla u(1,0,1) = (0,0,1)$，最大方向导数为 $1$。

(4) 求椭圆 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ 的面积。

解：令 $L = x^2 + y^2 - \lambda(3x^2 + 2xy + 3y^2 - 1)$。解 $\begin{cases} L'_x \equiv 2x - \lambda(6x+2y) = 0 \\ L'_y \equiv 2y - \lambda(2x+6y) = 0 \end{cases}$，得 $x - y = 0$ 或

者 $x + y = 0$，代人 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$，分别得 $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$ 或者 $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$。面积为 $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$。

(5) 计算$\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy$。

解：$\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx=\int_0^1(1-y)\sin ydy=1-\sin 1$。

(6) 计算$\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中$\Sigma$为$x^2+y^2+z^2=1$的外侧。

解：由 Gauss 公式$\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$。

再由球坐标变换化为$3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{12\pi}{5}$。

(7) 求方程$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}=x$的通解。

解：$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}=0$特征根为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=3$；其通解为$C_1+C_2e^{3x}$。设$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}=x$的特解为$(ax+b)x$，解得$y^*=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{9}x$。故原方程的通解为$C_1+C_2e^{3x}-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{9}x$。

(8) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}$的收敛半径与收敛区间。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}\right|^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3[1+(-2/3)]^{\frac{1}{n}}}|x|^{2-\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}x^2$。当$|x|<\sqrt{3}$时，由 Cauchy 判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}$绝对收敛；当$|x|>\sqrt{3}$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}\right|=+\infty$得级数发散。故收敛半径为$R=\sqrt{3}$。当$|x|=\sqrt{3}$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(-3)^n+2^n}3^{n-\frac{1}{2}}\right|=+\infty$，级数发散。

故收敛区间$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$。

2. (本题共 10 分) 将 $f(x)=x^2$ 在 $[0,2\pi]$ 上展开成 Fourier 级数，并求其和函数 $S(x)$。

解： $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8}{3}\pi^2$， $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx dx=\frac{4}{n^2}$，

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx dx=-\frac{4}{n}\pi$， $n=1,2,\cdots$。

$x^2$ 的 Fourier 级数为 $\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4}{n}\pi\sin nx$。

由于 $x^2$ 的局部可导，收敛定理得 $S(x)=\begin{cases}x^2, & x\in(0,2\pi)\\ 2\pi^2, & x=0,2\pi\end{cases}$。

3. (本题共 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$ 的和函数 $S(x)$。

解：原幂级数的收敛半径为 $R=1$。因此

$\left(xS(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$， $x\in(-1,1)$；当 $x=0$ 时， $\left(xS(x)\right)'=0$。

$\left(xS(x)\right)''=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$， $x\in(-1,1)$。

两边积分得 $\left(xS(x)\right)'=-\ln(1-x)$， $x\in(-1,1)$。

再积分得 $xS(x)=x+(1-x)\ln(1-x)$， $x\in(-1,1)$。

由于原幂级数的收敛域为 $x\in[-1,1]$，由 $S(x)$ 在 $x=-1$ 处的右连续，$S(x)$ 在 $x=-1$ 处的左连续，得

$$S(x)=\begin{cases}\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}+1, & x\in[-1,1), x\neq 0\\ 0, & x=0\\ 1, & x=1\end{cases}$$。

4. (本题共 10 分) 求 $\iint_D (xy)^{-2}dxdy$，其中 $D$ 是由 $y=x^2$， $y=\frac{1}{4}x^2$ 以及 $x=\frac{1}{4}y^2$ 所围成的区域。

解：令 $u=\frac{y}{x^2}$， $v=\frac{x}{y^2}$，在 $ouv$ 坐标中的积分区域为 $D':\frac{1}{4}\le u\le 1,\frac{1}{4}\le v<+\infty$。

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{3}u^{-2}v^{-2}\text{。}\iint\limits_{D}(xy)^{-2}dxdy=\iint\limits_{D'}(uv)^{2}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv=\frac{1}{3}\iint\limits_{D'}dudv=+\infty\text{。}$$

5. (本题共 10 分) 证明不等式：当 $x\geq 1$， $y\geq 0$ 时， $e^{y}+x\ln x-x-xy\geq 0$ 。

证明：令 $f(x,y)=e^{y}+x\ln x-x-xy$，

$f'_x(x,y)=\ln x-y$， $f'_y(x,y)=e^{y}-x$，

$\forall x_0\geq 1$， $f(x_0,y)$ 在 $y_0=\ln x_0$ 处最小值 $f(x_0,\ln x_0)=0$；

$\forall y_0\geq 0$， $f(x,y_0)$ 在 $x_0=e^{y_0}$ 处最小值 $f(e^{y_0},y_0)=0$ 。因此 $f(x,y)$ 最小值 $0$ 。

6. (本题共 10 分) 设 $z=f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leq 1$ 上有连续的偏导数，且在 $x^2+y^2=1$ 上恒为零，证明： $f(0,0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\frac{-1}{2\pi}\iint\limits_{D(\varepsilon)}\frac{xf'_x+yf'_y}{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D(\varepsilon)$ 为圆环区域 $\varepsilon^2\leq x^2+y^2\leq 1$ 。

证明一：令 $P=\frac{-yf(x,y)}{x^2+y^2}$， $Q=\frac{xf(x,y)}{x^2+y^2}$，则 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{xf'_x+yf'_y}{x^2+y^2}$ 。由 Green 公式得

$\iint\limits_{D(\varepsilon)}\frac{xf'_x+yf'_y}{x^2+y^2}dxdy=\oint\limits_{x^2+y^2=\varepsilon^2}Pdx+Qdy$，其中 $x^2+y^2=\varepsilon^2$ 为顺时针方向。

设 $\vec{\tau}$ 为 $x^2+y^2=\varepsilon^2$ 上沿顺时针方向的单位切向量，$\vec{n}$ 为 $x^2+y^2=\varepsilon^2$ 上指向原点的单位法向量，则

$$(dx,dy)=\vec{\tau}ds=(-\cos(\vec{n},y),\cos(\vec{n},x))ds=-(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})ds,$$

从而

$$\oint\limits_{x^2+y^2=\varepsilon^2}Pdx+Qdy=-\oint\limits_{x^2+y^2=\varepsilon^2}\frac{f}{\sqrt{x^2+y^2}}ds\text{。}$$

又 $\oint\limits_{x^2+y^2=\varepsilon^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}ds=2\pi$，和 $z=f(x,y)$ 的连续性，利用三角不等式估计得证。

证明二：由散度定理(Green 公式的等价形式)，

$$\oint_{\partial D} P\cos(\vec{n},x)+Q\cos(\vec{n},y)ds=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy,$$

令 $P=\dfrac{xf(x,y)}{x^2+y^2}$， $Q=\dfrac{yf(x,y)}{x^2+y^2}$， 直接得

$$\iint_{D(\varepsilon)}\frac{xf'_x+yf'_y}{x^2+y^2}dxdy=-\oint_{x^2+y^2=\varepsilon^2}\frac{f}{\sqrt{x^2+y^2}}ds。$$

7. (本题共 10 分) 设 $z=f(x,y)$ 在 $R^2$ 上具有连续的二阶偏导数。证明：

1) 若 $z=f(x,y)$ 变量可分离，即存在连续可导函数 $\varphi(x)$， $\psi(y)$ 使得 $f(x,y)\equiv\varphi(x)\psi(y)$，则 $z=f(x,y)$ 满足 $z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

2) 若 $z=f(x,y)>0$，且满足 $z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}$，则 $z=f(x,y)$ 变量可分离。

证明：1) 略；2) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{z'_x}{z}\right)=\dfrac{zz''_{xy}-z'_yz'_x}{z^2}=0$，故 $\dfrac{z'_x}{z}=h(x)$，其中 $h(x)$ 为连续可导函数。

从而 $\dfrac{\partial}{\partial x}\ln z=h(x)$，积分得 $\ln z=\int h(x)dx+g(y)$，其中 $g(y)$ 为连续可导函数。得证。

（装订线内不要答题）