

复旦大学数学科学学院
2013~2014 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称: 高等数学 A (上) 课程代码: MATH120001

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓 名: _____ 学 号: _____ 专 业: _____

题 号	1	2	3	4	5	6	7	总 分
得 分								

1. (本题满分 48 分, 每小题 6 分) 计算下列各题:

(1) 设 $y = \cos(\ln x)$, 求 y'' ;

(2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$;

(装订线内不要答题)

(3) 求函数 $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ 的单调区间和极值;

(4) 求曲线 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的拐点;

(5) 求不定积分 $\int e^x \cos(2e^x) dx$;

(6) 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$;

(7) 问矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 是否可逆? 若可逆, 求其逆矩阵;

(8) 问当 a, b 取何值时, 齐次线性方程组
$$\begin{cases} ax + y + z = 0, \\ x + by + z = 0, \\ x + 2by + z = 0 \end{cases}$$
 只有零解?

2. (本题满分 8 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1), \\ 2x, & x \in [1, 2]. \end{cases}$ 求 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 在 $[0, 2]$ 上的表达式,

并讨论 $F(x)$ 在 $x=1$ 点的可导性。

3. (本题满分 8 分) 已知抛物线 $L: y = -x^2 + 4x - 3$ 。

(1) 求 L 分别在点 $(0, -3)$ 和 $(3, 0)$ 处的切线的方程;

(2) 求 (1) 中的两条切线与 L 所围图形的面积。

4. (本题满分 8 分) 讨论方程 $x \ln x = a$ 有几个实根。

5. (本题满分 8 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且满足方程

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = e^x(x^2 - 2x)。$$

(1) 求 $f(x)$ 的表达式; (2) 求 $f(x)$ 的极值。

6. (本题满分 10 分) 已知 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的特征向量。

- (1) 求常数 a , b 及 ξ 所对应的特征值;
- (2) 问 A 是否能对角化? 请说明理由。

7. (本题满分 10 分) (1) 求 $\int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$ 和 $\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} dx$;

(2) 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t} dt}{\int_0^x \frac{1}{1+\cos^2 t} dt} = 2 - \sqrt{2}$ 。