

# 复旦大学数学科学学院

## 2014~2015 学年第一学期期末考试试卷

### A 卷

课程名称: 《高等数学 A》(I) 课程代码: MATH120001

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

题号	1	2	3	4	5	6	7	总分
得分								

1. (本题满分 48 分, 每小题 6 分) 计算下列各题:

(1) 求函数  $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t \end{cases}$  的导数  $\frac{dy}{dx}$ ;

(2) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left( \cot x - \frac{1}{x} \right)$ ;

姓 名: \_\_\_\_\_ 学 号: \_\_\_\_\_ 专 业: \_\_\_\_\_

(装订线内不要答题)

(3) 求函数  $f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$  的单调区间和极值;

(4) 求曲线  $y = x^2 \ln x$  的凸性与拐点;

(5) 求不定积分  $\int \sin^3 x dx$  ;

(6) 计算定积分  $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$ ;

(7) 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 求解矩阵方程  $AX = B$ ;

( 装 订 线 内 不 要 答 题 )

(8) 已知  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ , 问线性方程组  $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1, \\ x_2 - x_3 = a_2, \\ x_3 - x_1 = a_3 \end{cases}$  是否一定有解? 请说明理由。

2. (本题满分 8 分) 设函数  $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \geq 0, \\ \frac{\sin x + \cos x - 1}{x}, & x < 0 \end{cases}$  在  $x=0$  点可导, 求常数

$a$ 、 $b$  的值。

3. (本题满分 8 分) 设函数  $f$  在  $x=0$  点附近有定义, 且满足  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + xf(x)}{x^3} = 0$ 。

(1) 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + f(x)}{x^2}$ ; (2) 若  $f$  在  $x=0$  点二阶可导, 问  $x=0$  是否为函数  $f$  的极值

点? 若是, 指出它是极小值点还是极大值点。

4. (本题满分 10 分) 已知抛物线的一段  $L: y = -x^2 + 1$  ( $0 \leq x \leq 1$ )。 (1) 设  $(x_0, y_0)$  为  $L$  上一点, 求  $L$  在这点的切线、  $L$  和两个坐标轴所围成的图形的面积; (2) 确定  $(x_0, y_0)$ , 使得 (1) 中图形的面积最小。

5. (本题满分 8 分) 证明: 当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  时成立

$$\frac{1}{3} \tan x + \frac{2}{3} \sin x > x。$$

6. (本题满分 8 分) 已知定义在  $(-1, +\infty)$  上的连续函数  $f$  满足

$$f(x)\left(\int_0^x f(t)dt + 1\right) = \frac{xe^x}{2(1+x)^2},$$

求  $f(x)$  的表达式。

7. (本题满分 10 分) 设  $\mathbf{A}$  是 3 阶实方阵, 满足  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$  且  $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$  是单位矩阵), 问  $\mathbf{A}$  是否可以相似于对角矩阵, 为什么?

。