

复旦大学数学科学学院

2014~2015 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称: 《高等数学 A》(I)

课程代码: MATH120001

开课院系: 数学科学学院

考试形式: 闭卷

题号	1	2	3	4	5	6	7	总分
得分								

1. (本题满分 48 分, 每小题 6 分) 计算下列各题:

(1) 求函数 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$;

(2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$;

姓名: _____ 学号: _____ 专业: _____

(装订线内不要答题)

(3) 求函数 $f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$ 的单调区间和极值;

(4) 求曲线 $y = x^2 \ln x$ 的凸性与拐点;

(5) 求不定积分 $\int \sin^3 x dx$;

(6) 计算定积分 $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$;

(7) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求解矩阵方程 $AX = B$;

(装 订 线 内 不 要 答 题)

(8) 已知 $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, 问线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1, \\ x_2 - x_3 = a_2, \\ x_3 - x_1 = a_3 \end{cases}$ 是否一定有解? 请说明理由。

2. (本题满分 8 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \geq 0, \\ \frac{\sin x + \cos x - 1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 点可导, 求常数

a 、 b 的值。

3. (本题满分 8 分) 设函数 f 在 $x = 0$ 点附近有定义, 且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + xf(x)}{x^3} = 0$ 。

(1) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + f(x)}{x^2}$; (2) 若 f 在 $x = 0$ 点二阶可导, 问 $x = 0$ 是否为函数 f 的极值

点? 若是, 指出它是极小值点还是极大值点。

4. (本题满分 10 分) 已知抛物线的一段 $L: y = -x^2 + 1$ ($0 \leq x \leq 1$)。 (1) 设 (x_0, y_0) 为 L 上一点, 求 L 在这点的切线、 L 和两个坐标轴所围成的图形的面积; (2) 确定 (x_0, y_0) , 使得 (1) 中图形的面积最小。

5. (本题满分 8 分) 证明: 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时成立

$$\frac{1}{3} \tan x + \frac{2}{3} \sin x > x。$$

6. (本题满分 8 分) 已知定义在 $(-1, +\infty)$ 上的连续函数 f 满足

$$f(x)\left(\int_0^x f(t)dt + 1\right) = \frac{xe^x}{2(1+x)^2},$$

求 $f(x)$ 的表达式。

7. (本题满分 10 分) 设 \mathbf{A} 是 3 阶实方阵, 满足 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ 且 $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$ (\mathbf{I} 是单位矩阵), 问 \mathbf{A} 是否可以相似于对角矩阵, 为什么?

。