

《数学分析 (II)》试题 (答案)

2004.6

一. 1. $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4}$; 2. $\frac{20}{3}$; 3. 0; 4. $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$;

5. $dz = x^{yz} \left(\frac{yz}{x} dx + z \ln x dy + y \ln x dz \right)$ 。

二. $a = 3$ 。

三. 是紧集。

四. 一致收敛。

五. $\frac{3}{4}$ 。

六. 因为 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 单调增加, 因此 $f(x) > f(1) = 1$ 。所以 $f'(x) < \frac{1}{x^2 + 1}$ ($x > 1$), 于是

$$f(x) = f(1) + \int_1^x f'(t) dt < 1 + \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt < 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = 1 + \frac{\pi}{4}。$$

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(1) + \int_1^{+\infty} f'(t) dt < 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = 1 + \frac{\pi}{4}。$$

七. 发散。

八. $\ln(2 + \sqrt{2})$ 。