复旦大学数学科学学院

2007～2008 学年第一学期期末考试试卷

□A 卷

课程名称：__数学分析 III__　　课程代码：__MATH 130001__

开课院系：__数学科学学院__　　考试形式：闭卷

姓　名：________　学　号：________　专　业：________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									

填充题（每空格 5 分，共 30 分）

（1） $\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^3}\,dx=$ ________________ 。

（2） $\int_0^{\sqrt{2}} dy\int_y^{\sqrt{4-y^2}} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx=$ ________________ 。

（3） 曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=2x^2+y^2 \end{cases}$ 在点 $(1,1,3)$ 处的切线方程为________________ 。

（4） $f(x^2+y^2+z^2, xyz)=0$， $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________________ 。

（5） $I(t)=\int_0^{\sin t}\dfrac{\ln(1+tx)}{x}\,dx$， $\dfrac{d\,I(t)}{d\,t}=$ ________________ 。

（6） $\vec{\boldsymbol{f}}(x,y,z)=\dfrac{(y-z, z-x, x-y)}{x^2+y^2+z^2}$， $\mathbf{rot}\,\vec{\boldsymbol{f}}(x,y,z)=$ ________________ 。

解答题（每题 10 分）

2．由变量代换 $\begin{cases} u=x-2y \\ v=x+ay \end{cases}$，可把 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求 a 的值。

3．设 $\int_1^2 f(t)dt=A$，D 是由曲线 $xy=1,\ xy=2,\ y=x,\ y=4x$ 所围区域，求二重积分 $\iint_D f(xy)dxdy$。

4．计算曲面 $z=\sqrt{2xy}\quad (x\ge 0, y\ge 0)$ 包含在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 内的部分的面积。

5．利用 Lagrange 乘数法，在曲面 $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1\quad (x>0, y>0, z>0)$ 上求一点，使过该点的切平面在三个坐标轴上的截距平方和最小。

6．计算第二类曲线积分：$I=\int_L (x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$,其中有向曲线 L 为 $L: x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=t$， $t:0\to 2\pi$ 。

7. 判断含参变量反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+yx^2}dx$ 关于 y 在下述区间上是否一致收敛？证明你的断言。（1） $0<y_0\le y<+\infty$；（2） $0<y<+\infty$。

8．设 $\alpha\in(-1,1)$，求 $f(x)=\cos\alpha x$ 在 $x\in[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 展开，并利用展开式证明：$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$。