复旦大学数学科学学院

2009～2010 学年第一学期期末考试试卷

□A 卷

课程名称：__数学分析 III__ 课程代码：__MATH 130001.01__

开课院系：__数学科学学院__ 考试形式：闭卷

姓 名：________ 学 号：________ 专 业：________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									

1．填充题（每空格 5 分，共 30 分）

（1） $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(3,4)$ 点沿 $\vec{\mathbf{v}}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 的方向导数为________ 。

（2）球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 和柱面 $x^2+y^2=2ay$ 的交线在点 $P(a,a,\sqrt{2}a)$ 处的法平面方程为________ 。

（3）交换积分次序： $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx=$________ 。

（4） $I(y)=\int_0^{\sin y}\sqrt{1+x^2y^2}\,dx$，则 $I'(y)=$________ 。

（5）利用 Euler 积分计算 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{(1+x^2)^3}dx=$________ 。

（6） $\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx$ 关于 α 在 $[0,+\infty)$ 是否一致收敛？（回答“是”或“否”）________ 。

解答题（每题 10 分）

2．二元函数 $f(x,y)$ 有连续偏导数，并且 $f(1,0)=f(0,1)$，证明：在单位圆周上至少存在两点满足 $y\,f_x(x,y)=x\,f_y(x,y)$。

3．计算球冠$\left\{ (x,y,z) \,\middle|\, x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\geq\frac{\sqrt{2}}{2}R \right\}$的面积。

4．设$0<p<1$，求积分$I(p)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx$（需要计算过程与理由）。

5．利用 Lagrange 乘数法，在曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (x>0,y>0,z>0)$上求一点，使过该点的切平面与三个坐标平面所围体积最小。

6．$\vec{\mathbf{r}}=(x,y,z)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求函数$\Phi(r)$，使 $div(\Phi(r)\vec{\mathbf{r}})=0$。

7．计算第二类曲线积分

$$\int_L\left(x^2-yz\right)dx+\left(y^2-zx\right)dy+\left(z^2-xy\right)dz,$$

其中$L: x=a\cos t,\ y=be^t\sin t,\ z=ct^2$， $a,b,c>0$为常数， $t:0\to 2\pi$。

8．将$y=\sin x,\quad x\in(0,\pi)$展开成余弦级数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$的和。