

复旦大学数学科学学院

2006~2007 学年第二学期期末考试试卷

□A 卷

课程名称: 数学分析II 课程代码: 218.121.2.01

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓 名: _____ 学 号: _____ 专 业: _____

题 目	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									

填充题

1. (每空格 5 分, 共 30 分)

(1) 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sqrt{1+x^2}$, 求 $\int xf'(x)dx =$ _____。

(2) 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha \sqrt{1+x}} dx$ 收敛, 则 α 的范围是 _____。

(3) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{3^n}$ 的和函数与收敛范围为 _____。

(4) 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ 是否收敛? (回答是或否) _____。

(5) $S_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是否一致收敛? (回答是或否) _____。

(6) 设 $w = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, φ 具有二阶连续导数, 则

$$x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \text{_____}。$$

解答题 (每题 10 分)

2. 计算定积分 $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx$ 。

3. $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 求 $\int_0^\pi f(x) dx$ 。

4. 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ 的弧长。

5. 求抛物线 $y^2 - 2y = x$ 与直线 $x + y = 6$ 所围区域的面积。

6. 求 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 在 $x = 0$ 的 Taylor 展开。

7. 问函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^2 (1-x)^n$ 关于 x 在 $[0, 1]$ 上是否一致收敛? 证明你的断言。

8. $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上有连续导数 $f'(x)$, $f(0) = 0$, 证明:

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx.$$