《数学分析（III）》试题答案

2005.1

一.（本题满分 10 分） $x_0=y_0=z_0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

二.（本题满分 10 分） $\dfrac{\pi}{2}a^2$。

三.（本题满分 10 分） $\dfrac{15}{2}$。

四.（本题满分 10 分）

作球面坐标变换 $x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\varphi$ 得

$$\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}dxdydz=\int_0^1 r^2dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}e^{|r\cos\varphi|}\sin\varphi d\varphi\ 。$$

由于 $r\int_0^{\pi}e^{|r\cos\varphi|}\sin\varphi d\varphi=r\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{r\cos\varphi}\sin\varphi d\varphi+r\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-r\cos\varphi}\sin\varphi d\varphi=2(e^r-1)$，所以

$$\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}dxdydz=4\pi\int_0^1 r(e^r-1)dr=2\pi\ 。$$

五.（本题满分 10 分） $2\pi a^2$

六. （本题满分 10 分） $-\dfrac{\pi}{2}h^4$。

七.（本题满分 10 分） $\lambda=-1$； $u(x,y)=-\arctan\dfrac{y}{x^2}+C$。

八.（本题满分 15 分） $f(x)=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}$， $-\pi\le x\le\pi$；

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}；\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(4n^2-1\right)^2}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}。$$

九.（本题满分 15 分）（1）因为 $\left|\dfrac{\cos xt}{t(1+t^2)}\right|\le\dfrac{1}{t(1+t^2)}$， $x\in(-\infty,+\infty)$， $t\in[1,+\infty)$，

而 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t(1+t^2)}dt$ 收敛，所以 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos xt}{t(1+t^2)}dt$ 关于 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛。

（2）对于任意给定的 $\varepsilon>0$。因为 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos xt}{t(1+t^2)}dt$ 一致收敛，所以存在 $A>1$，使

得 $\int_A^{+\infty}\dfrac{\cos xt}{t(1+t^2)}dt<\dfrac{\varepsilon}{2}$（ $x\in(-\infty,+\infty)$ ）。由 Riemann 引理知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^{A}\dfrac{\cos xt}{t(1+t^2)}dt=0$，

所以存在 $X>0$，当 $x>X$ 时成立 $\left|\int_1^A \frac{\cos xt}{t(1+t^2)}dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是当 $x>X$ 时成立

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\cos xt}{t(1+t^2)}dt\right| \le \left|\int_1^A \frac{\cos xt}{t(1+t^2)}dt\right| + \left|\int_A^{+\infty} \frac{\cos xt}{t(1+t^2)}dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\text{。}$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^{+\infty} \frac{\cos xt}{t(1+t^2)}dt=0$。

（3）因为对于任意 $x_1, x_2 \in(-\infty,+\infty)$，成立

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right| = \left|\int_1^{+\infty} \frac{(\cos x_1 t-\cos x_2 t)}{t(1+t^2)}dt\right|$$

$$=\left|\int_1^{+\infty} \frac{2\sin\frac{x_1+x_2}{2}t\sin\frac{x_2-x_1}{2}t}{t(1+t^2)}dt\right|$$

$$\le \int_1^{+\infty} \left|\frac{2\sin\frac{x_1+x_2}{2}t\sin\frac{x_2-x_1}{2}t}{t(1+t^2)}\right|dt \le \int_1^{+\infty} \frac{2\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|t}{t(1+t^2)}dt$$

$$=|x_1-x_2|\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{4}|x_1-x_2|,$$

这可直接推出 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续。