

复旦大学数学科学学院

2008~2009 学年第一学期期末考试试卷

□A 卷

课程名称: 数学分析 I 课程代码: MATH 120008

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓名: _____ 学号: _____ 专业: _____

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得分									

填空题

1. (每空格 5 分, 共 30 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) =$ _____

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)}{n^3} - \frac{1}{3} \right) =$ _____

(3) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, f''(x) = \begin{cases} & x \neq 0 \\ & x = 0 \end{cases}$

(4) 曲线 $y^3 + 3x^2y + x - 3 = 0$ 在 $(-1, 1)$ 点处的切线方程为 _____

(5) $a, b > 0, a + b = 1, m, n$ 为正整数, 则 $a^m b^n$ 的最大值为 _____。

(6) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 在 $x = 0$ 的 n 次 Taylor 多项式为 _____

_____。

解答题 (每题 10 分)

2. 当 $x \rightarrow 0+$, $x^2 + \alpha(1 - \cos x) + \beta \ln \frac{\sin x}{x}$ 最高为几阶无穷小量? 这时 α, β

等于多少?

3. 设 $f(x)$ 在区间 $(-2,2)$ 可微, 证明在 $(-2,2)$ 中至少有 $x(1-x)f'(x)+1-2x$ 的一个零点。
4. 证明: 当 $x > 0$ 时, 成立不等式: $\frac{e^x + 1}{e^x - 1} > \frac{2}{x}$ 。
5. 证明: $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充分必要条件是: 对任意 $\{x'_n\}$ 与 $\{x''_n\}$, 满足 $x'_n, x''_n \in I$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0$, 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x'_n) - f(x''_n)) = 0$ 。
6. 设对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 与任意给定的正整数 p , 存在正整数 $N = N(\varepsilon, p)$, 当 $n > N$ 时, 成立 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, 问数列 $\{x_n\}$ 是否收敛? 收敛的话, 请证明之; 不一定收敛的话, 请举出反例。
7. 在球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 上切割出高为 h , 底面半径为 r 的圆柱体, 问 h 与 r 的比例为多少时, 圆柱体的体积最大?
8. 设 $y = x^2 e^{-x}$, 讨论函数的单调性、极值、凸性、拐点, 求出它的渐近线, 并作出它的简图。