复旦大学2005～2006学年第一学期期末考试试卷

答案

1. （本题满分40分，每小题8分）

（1）$2\sqrt{2}x+y-2=0$。

（2）$\dfrac{1}{2}$。

（3）$y\big|_{x=e}=e^{\frac{1}{e}}$为极大值。

（4）曲线在$(0,1]$上为上凸，在$[1,+\infty)$上为下凸，$(1,-7)$为拐点。

（5）$-\dfrac{1}{x}-\ln\left|\dfrac{1-x}{x}\right|+C$。

2.（本题满分 15 分）f在$x=0$点连续且可微，$f(0)=0$，$f'(0)=1$。在其它点不连续，因此也不可微。

3.（本题满分10分）不一致连续。

4.（本题满分10分）e^2。

5.（本题满分15分）$x-(1+e^{-x})\ln(1+e^{x})+C$。

6.（本题满分10分）证明：要证的不等式$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\ln(1-x)}<1$　（$x<0$）等价于

$$\frac{\ln(1-x)}{x}-\ln(1-x)+1<0 \qquad （x<0）。$$

设$f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}-\ln(1-x)+1$，则

$$f'(x)=-\frac{x+\ln(1-x)}{x^2} \qquad （x<0）。$$

考虑$g(x)=x+\ln(1-x)$，则$g'(x)=1-\dfrac{1}{1-x}>0$（$x<0$），且$g(0)=0$，所以

$$g(x)=x+\ln(1-x)<0 \qquad （x<0）。$$

因此

$$f'(x)=-\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}>0 \qquad （x<0）。$$

因为$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=0$，因此当$x<0$时成立

$$f(x)=\frac{\ln(1-x)}{x}-\ln(1-x)+1<\lim_{x\to0-}f(x)=0。$$