

# 《数学分析 (II)》试题

2004.6

一. 计算下列各题:

1. 求定积分  $\int_1^e \frac{dx}{x(2 + \ln^2 x)}$ ;

2. 求定积分  $\int_{-2}^2 \max(1, x^2) dx$ ;

3. 求反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ ;

4. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) 2^n x^{2n}$  的收敛域;

5. 设  $u = x^{yz}$ , 求  $du$ 。

二. 设变量代换  $\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay \end{cases}$  可把方程  $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$  简化为  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ , 求常数  $a$ 。

三. 平面点集  $\{(0, 0)\} \cup \left\{ \left( \frac{1}{n}, \sin \frac{1}{n} \right) \mid n = 1, 2, \dots \right\}$  是否为紧集? 请说明理由。

四. 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n}$  在  $[0, 1]$  上是否一致收敛? 请说明理由。

五. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且满足  $f(1) = 1$  和

$$\int_0^x tf(2x-t)dt = \frac{1}{2} \arctan(x^2)。$$

求  $\int_1^2 f(x)dx$ 。

六. 设函数  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上具有连续导数, 且满足  $f(1) = 1$  和

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + [f(x)]^2}, \quad 1 \leq x < +\infty。$$

证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在且小于  $1 + \frac{\pi}{4}$ 。

七. 设如下定义函数:

$$f(x) = \int_x^{x^2} \left(1 + \frac{2}{t}\right)^t \sin \frac{1}{\sqrt{t}} dt, \quad x > 1.$$

判别级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$  的敛散性。

八. 设  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cos x dx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )。求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$  的和。