习　　题　5.1

1. 设 $f'_+(x_0)>0$， $f'_-(x_0)<0$，证明 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点。

2.（Darboux 定理）设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，$x_1,x_2\in(a,b)$。如果 $f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$，证明在 x_1 和 x_2 之间至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$。

3. 举例说明 Lagrange 中值定理的任何一个条件不满足时，定理结论就有可能不成立。

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微。利用辅助函数

$$\psi(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}$$

证明 Lagrange 中值定理，并说明 $\psi(x)$ 的几何意义。

5. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导, 证明 (a,b) 内存在一点 ξ，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}\ 。$$

6. 设非线性函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 上可导,则在 (a,b) 上至少存在一点 η，满足

$$|f'(\eta)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|,$$

并说明它的几何意义。

7. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$，其中 $a\neq 0$ 为常数。

8. 用 Lagrange 公式证明不等式：

⑴ $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$；

⑵ $ny^{n-1}(x-y)<x^n-y^n<nx^{n-1}(x-y)\quad(n>1,\ x>y>0)$；

⑶ $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}\quad(b>a>0)$；

⑷ $e^x>1+x\quad(x>0)$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义，且对任何实数 x_1 和 x_2，满足

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le(x_1-x_2)^2,$$

证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数。

10. 证明恒等式

⑴ $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$， $x\in[0,1]$；

⑵ $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$， $x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$；

⑶ $2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi$， $x\in[1,+\infty)$.

11. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导。证明：若 (a,b) 中除至多有限个点有 $f'(x)=0$ 之外，都有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加；同时举例说明，其逆命题不成立。

12. 证明不等式：

(1) $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$; (2) $3 - \frac{1}{x} < 2\sqrt{x}$, $x > 1$;

(3) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, $x > 0$; (4) $\tan x + 2\sin x > 3x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

(5) $\frac{1}{2^{p-1}} \le x^p + (1-x)^p \le 1$, $x \in [0,1], (p > 1)$；

(6) $\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}$，$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

13．证明：在 $(0,1)$ 上成立

1）$(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$ ；

2）$\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$。

14． 对于每个正整数 n （$n \ge 2$），证明方程

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x = 1$$

在 $(0,1)$ 内必有唯一的实根 x_n，并求极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$。

15．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0) = f(1) = 0$，$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$。证明：

1）存在 $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$，使得 $f(\xi) = \xi$ ；

2）对于任意实数 λ，必存在 $\eta \in (0, \xi)$，使得

$$f'(\eta) - \lambda[f(\eta) - \eta] = 1。$$

（提示：考虑函数 $e^{-\lambda x}[f(x) - x]$。）

16． 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，且 $g'(x) \ne 0$ $(x \in (a,b))$。分别利用辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

和

$$\psi(x) = \begin{vmatrix} g(x) & f(x) & 1 \\ g(a) & f(a) & 1 \\ g(b) & f(b) & 1 \end{vmatrix},$$

证明 Cauchy 中值定理，并说明 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的几何意义。

17． 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，证明存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)。$$

18． 设 $a, b > 0$，证明存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$ae^b - be^a = (1-\xi)e^\xi(a-b)。$$

19． 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续（$ab > 0$），在 (a,b) 上可导，证明存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \xi f'(\xi) - f(\xi)。$$

20．设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，在 $(1,+\infty)$ 上可导，已知函数 $e^{-x}f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有界，证明函数 $e^{-x}f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上也有界。

21． 设 $f'(x)$ 在 $(0,a]$ 上连续，且存在有限极限 $\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}f'(x)$，证明 $f(x)$ 在 $(0,a]$ 上一

致连续。

（提示： 考虑$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}$。）

22． 设$f(x)$在$x=0$的某邻域内有n阶导数，且$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，用 Cauchy 中值定理证明

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\quad (0<\theta<1).$$

23． 证明不等式：

(1) $\dfrac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$, $x,y>0,n>1$;　　(2) $\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}{2}>\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$，　$x\ne y$.

24． （Jensen 不等式）设$f(x)$为$[a,b]$上的连续下凸函数，证明对于任意$x_i\in[a,b]$和$\lambda_i>0$（$i=1,2,\cdots,n$），$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，成立

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)。$$

25． 利用上题结论证明：对于正数a,b,c成立

$$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\le a^a b^b c^c。$$

26． 设$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导，并且$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$。

27．设$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)二阶可导，证明存在$\eta\in(a,b)$，成立

$$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(\eta)。$$

（提示：在区间$\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$上考虑函数$g(x)=f(x)-f(x-\dfrac{b-a}{2})$。）

习　题　5.2

1. 对于

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty \text{ 或 } -\infty$$

的情况证明 L'Hospital 法则。

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\tan 2x)}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot}x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$;

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$;

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x-\sin^2 x}{x^4}$;

(13) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$;

(14) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$;

(15) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\dfrac{x}{2}$;

(16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$;

(17) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$;

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$;

(19) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$;

(20) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

3. 说明不能用 L'Hospital 法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+1)\sin x}{\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x+\mathrm{e}^{2x}}{x}$.

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

其中 $g(0)=0$，$g'(0)=0$，$g''(0)=10$。求 $f'(0)$。

5. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, & x\leq 0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性。

6．设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在，证明 $\lim\limits_{x\to 0+}x^{f(x)}=1$。

7．设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=k$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k$。

习　　题　5.3

1．由 Lagrange 中值定理知

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\theta(x)x}，\quad 0<\theta(x)<1，$$

证明：$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=1/2$。

2．设 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$，$(0<\theta<1)$，且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$，证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$。

3．设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，取结点为 $x=1$、1.728、2.744，求 $f(x)$ 的二次插值多项式 $p_2(x)$ 及其余项的表达式，并计算 $p_2(2)$ （$\sqrt[3]{2}=1.2599210\cdots$）。

4．设 $f(x)=2^x$，取结点为 $x=-1$、0、1，求 $f(x)$ 的二次插值多项式 $p_2(x)$ 及其余项的表达式，并计算 $p_2\left(\frac{1}{3}\right)$。请与上题的计算结果相比较并分析产生差异的原因。

5．设 $f(x)$ 在若干个测量点处的函数值如下：

x	1.4	1.7	2.3	3.1
$f(x)$	65	58	44	36

试求 $f(2.8)$ 的近似值。

6．若 h 是小量，问如何选取常数 a、b、c，才能使得 $af(x+h)+bf(x)+cf(x-h)$ 与 $f''(x)$ 近似的阶最高？

7．将 $n+1$ 个插值条件取为所有结点上的函数值和一阶导数值，即 $p_n(x)$ 满足

$$\begin{cases} p_n(x_i)=f(x_i) \\ p_n'(x_i)=f'(x_i) \end{cases}，\quad i=0,1,2,\cdots,\tfrac{n-1}{2}$$

的插值多项式称为 **Hermite** 插值多项式，在微分方程数值求解等研究领域中具有重要作用。它可以取为

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\left[f(x_k)q_k^{(0)}(x)+f'(x_k)q_k^{(1)}(x)\right],$$

这里，$\{q_k^{(0)}(x), q_k^{(1)}(x)\}_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}$是满足条件

$$q_k^{(0)}(x_i)=\delta_{ik},\quad [q_k^{(0)}(x_i)]'=0,\qquad i,\ k=0,1,2,\cdots,\tfrac{n-1}{2}$$

和

$$q_k^{(1)}(x_i)=0,\quad [q_k^{(1)}(x_i)]'=\delta_{ik},\qquad i,\ k=0,1,2,\cdots,\tfrac{n-1}{2}$$

的基函数。试仿照 Lagrange 插值多项式的情况构造$\{q_k^{(0)}(x), q_k^{(1)}(x)\}_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}$。

习　　题　5.4

1. 求下列函数在 $x=0$ 处的 Taylor 公式（展开到指定的 n 次）：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$，$n=4$；　　(2) $f(x)=\cos(x+\alpha)$，$n=4$；

(3) $f(x)=\sqrt{2+\sin x}$，$n=3$；　　(4) $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}$，$n=4$；

(5) $f(x)=\tan x$，$n=5$；　　(6) $f(x)=\ln(\cos x)$，$n=6$；

(7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，$n=4$；　　(8) $f(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，$n=4$

(9) $f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$，$n=3$.

2. 求下列函数在指定点处的 Taylor 公式：

(1) $f(x)=-2x^3+3x^2-2$，$x_0=1$；　　(2) $f(x)=\ln x$，$x_0=\mathrm{e}$；

(3) $f(x)=\ln x$；$x_0=1$　　(4) $f(x)=\sin x$，$x_0=\dfrac{\pi}{6}$；

(5) $f(x)=\sqrt{x}$，$x_0=2$.

3. 通过对展开式及其余项的分析，说明用

$$\ln 2=\ln\frac{1+x}{1-x}\bigg|_{x=\frac{1}{3}}\approx 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)\bigg|_{x=\frac{1}{3}}$$

比用

$$\ln 2=\ln(1+x)\big|_{x=1}\approx\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\bigg|_{x=1}$$

效果好得多的两个原因。

4. 利用上题的讨论结果，不加计算，判别用哪个公式计算 π 的近似值效果更好，为什么？

(1) $\frac{\pi}{4}=\arctan 1 \approx \left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_{x=1}$

(2) $\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$ （Machin 公式）

$$\approx 4\left[x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_{x=\frac{1}{5}}-\left[x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_{x=\frac{1}{239}}$$

5. 利用 Taylor 公式求近似值（精确到10^{-4}）：

(1) $\lg 11$； (2) $\sqrt[3]{\mathrm{e}}$； (3) $\sin 31^{\circ}$；

(4) $\cos 89^{\circ}$； (5) $\sqrt[5]{250}$； (6) $(1.1)^{1.2}$.

6. 利用函数的 Taylor 公式求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}\ (a>0)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\csc x\right)$； (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4})$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$； (6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$； (8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right]$.

7. 利用 Taylor 公式证明不等式：

(1) $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$， $x>0$；

(2) $(1+x)^{\alpha}<1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$， $1<\alpha<2$，$x>0$。

8. 判断下列函数所表示的曲线是否存在渐近线，若存在的话求出渐近线方程：

(1) $y=\frac{x^2}{1+x}$； (2) $y=\frac{2x}{1+x^2}$；

(3) $y=\sqrt{6x^2-8x+3}$； (4) $y=(2+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$；

(5) $y=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$； (6) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$；

(7) $y = x + \operatorname{arccot} x$;

(8) $y = \sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$;

(9) $y = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

(10) $y = x^5\left(\cos\dfrac{1}{x} - e^{-\frac{1}{2x^2}}\right)$;

(11) $y = x^2\left(xe^{\frac{1}{3x}} - \sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$;

(12) $y = x^2\left(xe^{\frac{1}{2x}} - \sqrt{x^2+x}\right)$.

9．(1) 设$0 < x_1 < \dfrac{\pi}{2}$，$x_{n+1} = \sin x_n$（$n = 1, 2, \cdots$），证明：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$；　　(ii) $x_n^2 \sim \dfrac{3}{n}\quad (n\to\infty)$。

(2) 设$y_1 > 0$，$y_{n+1} = \ln(1+y_n)$（$n = 1, 2, \cdots$），证明：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$；　　(ii) $y_n \sim \dfrac{2}{n}\quad (n\to\infty)$。

（提示：分别对极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$和$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\frac{1}{y_n}}$应用 Stolz 定理）

10．设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且满足$|f''(x)| \le 1$，$f(x)$在区间$(0,1)$内取到最大值$\dfrac{1}{4}$。证明：$|f(0)| + |f(1)| \le 1$。

11．设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且在$[0,1]$上成立

$$|f(x)| \le 1，|f''(x)| \le 2。$$

证明在$[0,1]$上成立$|f'(x)| \le 3$。

12．设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$f(0) = f(1) = 0$，$\min\limits_{0\le x\le 1} f(x) = -1$。证明：

$$\max_{0\le x\le 1} f''(x) \ge 8。$$

13．设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$f(a) = f(b) = 0$，证明

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a\le x\le b}|f''(x)|。$$

习　　题　5.5

1．求下列函数的极值点，并确定它们的单调区间：

(1) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$;

(2) $y = x + \sin x$;

(3) $y = \sqrt{x}\ln x$;

(4) $y = x^n\,\mathrm{e}^{-x}$　（$n \in \mathrm{N}^+$）；

(5) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{x-2}}$；　(6) $y=\dfrac{1-x}{1+x^2}$；

(7) $y=3x+\dfrac{4}{x}$；　(8) $y=x-\ln(1+x)$；

(9) $y=\cos^3 x+\sin^3 x$；　(10) $y=\arctan x-x$；

(11) $y=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$；　(12) $y=2-\sqrt[3]{(x-1)^2}$；

(13) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$；　(14) $y=x^{\frac{1}{x}}$.

2. 求下列曲线的拐点，并确定函数的保凸区间：

(1) $y=-x^3+3x^2$；　(2) $y=x+\sin x$；

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$；　(4) $y=x\,\mathrm{e}^{-x}$；

(5) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{x-2}}$；　(6) $y=\dfrac{1-x}{1+x^2}$；

(7) $y=x-\ln(1+x)$；　(8) $y=\arctan x-x$；

(9) $y=(x+1)^4+\mathrm{e}^x$；　(10) $y=\ln(1+x^2)$；

(11) $y=\mathrm{e}^{\arctan x}$；　(12) $y=x+\sqrt{x-1}$.

3. 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，证明：$f(x)$ 在 x_0 处取到极大值（极小值）的必要条件是

$f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)\le 0$（$f''(x_0)\ge 0$）。

4. 设 $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续且 $\varphi(a)\ne 0$，讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的极值情况。

5. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有 n 阶连续导数，且 $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$，

$f^{(n)}(a)\ne 0$，讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的极值情况。

6．如何选择参数 $h>0$，使得

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$$

在 $x=\pm\sigma$（$\sigma>0$ 为给定的常数）处有拐点？

7．求 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ 在拐点处的切线方程。

8．作出下列函数的图象（渐近线方程可利用上一节习题 8 的结果）：

⑴ $y=\dfrac{x^2}{1+x}$；

⑵ $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$；

⑶ $y=\sqrt{6x^2-8x+3}$；

⑷ $y=(2+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$；

⑸ $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$；

⑹ $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$；

⑺ $y=x+\operatorname{arc}\cot x$；

⑻ $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$；

⑼ $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

9．求下列数列的最大项：

⑴ $\left\{\dfrac{n^{10}}{2^n}\right\}$；

⑵ $\{\sqrt[n]{n}\}$.

10．设 a,b 为实数，证明

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}。$$

11．设 $a>\ln 2-1$ 为常数，证明当 $x>0$ 时，

$$x^2-2ax+1<e^x。$$

12．设 $k>0$，试问当 k 为何值时，方程 $\arctan x-kx=0$ 有正实根？

13．对 a 作了 n 次测量后获得了 n 个近似值 $\{a_k\}_{k=1}^n$，现在要取使得

$$s=\sum_{k=1}^{n}(a_k-\xi)^2$$

达到最小的 ξ 作为 a 的近似值，ξ 应如何取？

14．证明：对于给定了体积的圆柱形，当它的高与底面的直径相等的时候表面积最小。

15． 在底为 a 高为 h 的三角形中作内接矩形，矩形的一条边与三角形的底边重合，求此矩形的最大面积？

16．求内接于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，边与椭圆的轴平行的最大矩形。

17．将一块半径为 r 的圆铁片剪去一个圆心角为 θ 的扇形后做成一个漏斗，问 θ 为何值时漏斗的容积最大？

18．要做一个容积为V的有盖的圆柱形容器，上下两个底面的材料价格为每单位面积a元，侧面的材料价格为每单位面积b元，问直径与高的比例为多少时造价最省？

19． 要建造一个变电站 M 向 A、B 两地送电（图 5.5.6），M 与 A 之间的电缆每千米a元，与 B 之间的电缆每千米b元，为使总投资最小，问变电站 M 的位置应满足什么性质？

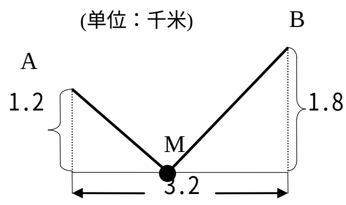

图 5.5.6

计 算 实 习 题

（在教师的指导下，编制程序在电子计算机上实际计算）

1. 用两分法求下列方程的一个近似解（精确到小数点后第 6 位）：

⑴ $x^3+3x-5=0$，$x^* \in [1,2]$；

⑵ $x=\mathrm{e}^{-x}$，$x^* \in \left[\frac{1}{2}, \ln 2\right]$；

⑶ $x^2=\cos x$，$x^* \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$；

⑷ $7x^2-3x+\frac{4}{x}=0$，$x^* \in [2, 2.5]$.

2. 用 Newton 法求下列方程的近似解（精确到小数点后第 10 位）：

⑴ $x^3-x+4=0$; ⑵ $x^2+\frac{1}{x^2}=10x$;

⑶ $x\lg x=1$; ⑷ $x+\mathrm{e}^x=0$;

⑸ $\frac{x}{2}=\sin x$; ⑹ $\cos x \cdot \mathrm{ch}\, x=1$.

3. 仿照例 5.6.2，用 Newton 法导出计算机上求 $A^{\frac{1}{n}}$（$A>0$，n为非零实数）和$\frac{1}{A}$的算法（即只用加、减、乘三种运算的算法），并实际计算下列各值：

⑴ $\sqrt[3]{2}$； ⑵ $\frac{1}{\sqrt[5]{9}}$； ⑶ $\frac{1}{7}$； ⑷ $\frac{1}{11}$.

4. 当$\varepsilon=0.2$时，计算 Kepler 方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0 \quad (0<\varepsilon<1)$$

对应于$x=\frac{k}{8}\ (k=1,2,\cdots,8)$ 的y的近似值。

5. 求方程

$$\tan x=x$$

的最小的三个正根，精确到10^{-12}。

6. 求方程

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$$

的两个正根，精确到10^{-12}。