习　题　16.1

1. 设交流电的变化规律为 $E(t) = A\sin\omega t$，将它转变为直流电的整流过程有两种类型：

   ⑴　半波整流（图 16.1.5(a)）

   $$f_1(t) = \frac{A}{2}(\sin\omega t + |\sin\omega t|)\text{；}$$

   ⑵　全波整流（图 16.1.5(b)）

   $$f_2(t) = A|\sin\omega t|\text{；}$$

   现取 $\omega = 1$，试将 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 展开为 Fourier 级数。

(a)

(b)

图 16.1.5

2. 将下列函数在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成 Fourier 级数：

   ⑴　$f(x) = \operatorname{sgn} x$；　　⑵　$f(x) = |\cos x|$；

   ⑶　$f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \pi^2$；　　⑷　$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-\pi, 0), \\ 0, & x \in [0, \pi); \end{cases}$

   ⑸　$f(x) = \begin{cases} ax, & x \in [-\pi, 0), \\ bx, & x \in [0, \pi). \end{cases}$

3. 将下列函数展开成正弦级数：

   ⑴　$f(x) = \pi + x$，$x \in [0, \pi]$；　　⑵　$f(x) = e^{-2x}$，$x \in [0, \pi]$；

   ⑶　$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ \pi, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]; \end{cases}$　　⑷　$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, & x \in [0, 1), \\ 0, & x \in [1, 2]. \end{cases}$

4. 将下列函数展开成余弦级数：

   ⑴　$f(x) = x(\pi - x)$，$x \in [0, \pi]$；　　⑵　$f(x) = e^x$，$x \in [0, \pi]$；

   ⑶　$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \in [0, \frac{\pi}{4}), \\ 1, & x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]; \end{cases}$　　⑷　$f(x) = x - \dfrac{\pi}{2} + \left| x - \dfrac{\pi}{2} \right|$，$x \in [0, \pi]$.

5. 求定义在任意一个长度为 2π 的区间 $[a, a + 2\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数及其系数的计算公式。

6. 将下列函数在指定区间展开成 Fourier 级数：

   ⑴　$f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$，$x \in [0, 2\pi]$；　　⑵　$f(x) = x^2$，$x \in [0, 2\pi]$；

   ⑶　$f(x) = x$，　$x \in [0, 1]$；　　⑷　$f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x \in [-1, 0), \\ 0, & x \in [0, 1); \end{cases}$

   ⑸　$f(x) = \begin{cases} C, & x \in [-T, 0), \\ 0, & x \in [0, T) \end{cases}$（$C$ 是常数).

7. 某可控硅控制电路中的负载电流为

$$I(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<T_0,\\ 5\sin\omega t, & T_0\le t<T,\end{cases}$$

其中ω为圆频率，周期$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$。现设初始导通时间$T_0=\dfrac{T}{8}$（见图 16.1.6），求$I(t)$在$[0,T]$上的 Fourier 级数。

图 16.1.6

8. 设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积或绝对可积，证明：

(1) 若对于任意$x\in[-\pi,\pi]$，成立$f(x)=f(x+\pi)$，则$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$；

(2) 若对于任意$x\in[-\pi,\pi]$，成立$f(x)=-f(x+\pi)$，则$a_{2n}=b_{2n}=0$.

9. 设$f(x)$在$(0,\pi/2)$上可积或绝对可积，应分别对它进行怎么样的延拓，才能使它在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 级数的形式为

(1) $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x$；　　(2) $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin 2nx$.

10. 设周期为2π的函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 系数为a_n和b_n，求下列函数的 Fourier 系数$\tilde{a}_n$和$\tilde{b}_n$：

(1) $g(x)=f(-x)$；　　(2) $h(x)=f(x+C)$（C是常数）；

(3) $F(x)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x-t)dt$　（假定积分顺序可以交换）。

习　题　16.2

1．设$\psi(x)$在$[0,+\infty)$上连续且单调，$\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=0$，证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty}\psi(x)\sin px dx=0 .$$

2．设函数$\psi(u)$在$[-\pi,\pi]$上分段连续，在$u=0$点连续且有单侧导数，证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}du=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\cot\frac{u}{2}du .$$

3．设函数$\psi(u)$在$[-\delta,\delta]$上单调，证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-\delta}^{\delta}\left\{\psi(u)-\frac{1}{2}[\psi(0+)+\psi(0-)]\right\}\frac{\sin pu}{u}du=0 .$$

4．证明 Dirichlet 引理对$\psi(u)$是分段单调有界函数的情况依然成立。

5．证明 Lipschitz 判别法的推论。

6．对§16.1 的习题 2、3、4、6 中的函数，验证它们的 Fourier 级数满足收敛判别法的条件，并分别写出这些 Fourier 级数的和函数。

7．利用$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$，证明：

⑴ $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$； ⑵ $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$.

8. 求 $\sin x$ 全部非零零点的倒数的平方和。

9. 证明下列关系式：

⑴ 对 $0<x<2\pi$ 且 $a\neq 0$，有

$$\pi\,\mathrm{e}^{ax}=(\mathrm{e}^{2a\pi}-1)\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx-n\sin nx}{a^2+n^2}\right];$$

⑵ 对 $0<x<2\pi$ 且 a 不是自然数，有

$$\pi\cos ax=\frac{\sin 2a\pi}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\sin 2a\pi\cos nx+n(\cos 2a\pi-1)\sin nx}{a^2-n^2};$$

⑶ 对⑵，令 $x=\pi$，有

$$\frac{a\pi}{\sin a\pi}=1+2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}.$$

10. ⑴ 验证函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln\frac{|x|}{2\pi}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

满足 Dirichlet-Jordan 判别法条件而不满足 Dini-Lipschitz 判别法条件。

⑵ 验证函数

$$f(x)=\begin{cases}x\cos\frac{\pi}{2x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

满足 Dini-Lipschitz 判别法条件（今后会学到，它不满足 Dirichlet-Jordan 判别法条件，在此从略）。

习　题　16.3

1. 由例 16.1.2 的结果

$$x\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\qquad x\in(-\pi,\pi),$$

用逐项积分法求 x^2 和 x^3 的 Fourier 级数。

2. 证明定理 16.3.2 的推论 16.3.1：$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是某个可积或绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛。

3. 说明级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln\ln n}$ 点点收敛，但不可能是任何可积或绝对可积函数的 Fourier 级数。

4. 利用例 16.1.1 的结果

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,0)\\ 0, & x\in[0,\pi)\end{cases}\sim\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

和 Parseval 等式，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

5．利用例 16.1.2 的结果

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in[0,\pi) \\ -x & x\in[-\pi,0) \end{cases} \sim \frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx,$$

和 Parseval 等式，求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$。

6．利用

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad x\in(-\pi,\pi)$$

和 Parseval 等式，求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$。

7．设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期，且具有二阶连续导数的函数，记

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\quad b_n''=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\sin nx dx。$$

证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n''$ 绝对收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n|}<\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)。$$

8．设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的以 2π 为周期的连续函数。证明：若 $f(x)$ 的 Fourier 系数全为零，则 $f(x)\equiv 0$。

9．设 $f(x)$ 是周期为 2π 的任意一个连续函数，证明对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在三角多项式

$$\psi_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx),$$

使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\psi_n(x)|dx<\varepsilon。$$

习　　题　16.4

1．求下列定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的函数的 Fourier 变换：

(1) $f(x)=\begin{cases} A, & 0<x<\delta, \\ 0, & \text{其它}; \end{cases}$　　(2) $f(x)=e^{-a|x|}$，$a>0$；

(3) $f(x)=e^{-ax^2}$，$a>0$；　　(4) $f(x)=\begin{cases} e^{-2x}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0; \end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases} A\cos\omega_0 x, & |x|\le\delta, \\ 0, & |x|>\delta; \end{cases}$　$\omega_0\ne 0$ 是常数，$\delta=\frac{\pi}{\omega_0}$。

2．求 $f(x)=e^{-ax}$（$x\in[0,+\infty)$，$a>0$）的正弦变换和余弦变换。

3．设 $f_1(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$　$f_2(x)=\begin{cases} \sin x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$ 求 $f_1*f_2(x)$。

习　　题 16.5

1． 说明离散 Fourier 变换 $X(j)=\sum\limits_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{nj}{N}}$ 可以看成 Fourier 变换

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-i\omega x}dx$$

的离散近似形式的推广。

2． 证明正交关系式

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{nj}{N}}\mathrm{e}^{2\pi i\frac{nk}{N}}=\delta_{j,k}\quad。$$

3． 设 $N=pq$ （$p,q\in\mathbf{N}$），构造只需 $O((p+q)N)$ 次运算的 Fourier 变换算法。

4． 对 $N=2^3$，具体写出以 2 为底的 FFT 的计算流程。

计 算 实 习 题

（在教师的指导下，编制程序在电子计算机上实际计算）

1. 利用现成的数学通用软件（如 MATLAB、Mathematica、Maple 等），对于 $N=32,64,128$ ：

⑴ 生成实数序列 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ ；

⑵ 用 FFT 计算 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 的离散 Fourier 变换序列 $\{X(j)\}_{j=0}^{N-1}$；

⑶ 作出 $\{x(k)\}$ 和 $\{|X(j)|\}$ 的图并进行分析（参见图 16.5.4）；

⑷ 设定 $\delta_0>0$，将 $\{|X(j)|\}$ 中满足 $|X(j)|<\delta_0$ 的数据全部置为零，再进行离散 Fourier 逆变换，将得到的数据与 $\{x(k)\}$ 比较；

⑸ 改变 δ_0 的值，重复⑷，分析不同的 δ_0 对逆变换所得到的数据的影响。

2. 对于 $N=32,64,128$ ，

⑴ 产生两个实数序列 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 和 $\{y(k)\}_{k=0}^{N-1}$ ；

⑵ 用直接方法计算 $\{x(k)\}$ 和 $\{y(k)\}$ 的卷积 $\{z(k)\}_{k=0}^{N-1}$；

⑶ 改用离散 Fourier 变换的思想，用 FFT 计算 $\{z(k)\}$ ；

⑷ 结合 N 比较两种算法所用的时间。

3. 用 FFT 计算多项式 $\sum\limits_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ 的乘积，并与 $\frac{\sin 2x}{2}$ 的 Taylor 级数的相应项比较。