习　题　8.1

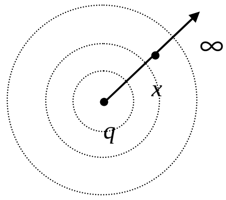

图8.1.4

1. 物理学中称电场力将单位正电荷从电场中某点移至无穷远处所做的功为电场在该点处的电位。一个带电量$+q$的点电荷产生的电场对距离r处的单位正电荷的电场力为$F=k\dfrac{q}{r^2}$（k为常数），求距电场中心x处的电位。

2. 证明：若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$和$\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛，k_1和k_2为常数，则$\int_a^{+\infty}\left[k_1 f(x)+k_2 g(x)\right]dx$也收敛，且

$$\int_a^{+\infty}[k_1 f(x)+k_2 g(x)]dx=k_1\int_a^{+\infty} f(x)dx+k_2\int_a^{+\infty} g(x)dx。$$

3. 计算下列无穷区间的反常积分（发散也是一种计算结果）：

(1) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\sin 5x dx$；　(2) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}\cos 2x dx$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+x+1}dx$；　(4) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$ $(a>0,b>0)$；

(5) $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{ax^2}dx$　$(a\in\mathbf{R})$；　(6) $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^p x}dx$　$(p\in\mathbf{R})$；

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(x^2+1)^{3/2}}dx$；　(8) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}dx$；

(9) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^4+1}dx$；　(10) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{1+x^2}dx$。

4. 计算下列无界函数的反常积分（发散也是一种计算结果）：

(1) $\int_0^1\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　(2) $\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$；

(3) $\int_1^2\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}dx$；　(4) $\int_0^1\dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$；

(5) $\int_{-1}^1\dfrac{1}{x^3}\sin\dfrac{1}{x^2}dx$；　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{\tan x}}dx$；

5. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$。

6. 计算下列反常积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x dx$;　　(2) $\int_0^{\pi} x\ln\sin x dx$。

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x dx$;　　(4) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx$;

(5) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$。

7. 求下列反常积分的 Cauchy 主值：

⑴ $(\mathrm{cpv})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$;　　⑵ $(\mathrm{cpv})\int_1^4 \frac{1}{x-2} dx$;

⑶ $(\mathrm{cpv})\int_{1/2}^{2} \frac{1}{x\ln x} dx$。

8. 说明一个无界函数反常积分可以化为无穷区间的反常积分。

9. ⑴ 以$\int_a^{+\infty} f(x)dx$为例，叙述并证明反常积分的线性性，保序性和区间可加性；

⑵ 举例说明，对于反常积分不再成立乘积可积性。

10. 证明当$a>0$时，只要下式两边的反常积分有意义，就有

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx = \ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}dx。$$

11. 设$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$。证明$A=0$。

12. 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上可导，且$\int_a^{+\infty} f(x)dx$与$\int_a^{+\infty} f'(x)dx$都收敛，证明$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

计 算 实 习 题

在教师的指导下，试编制一个通用的 Gauss-Legendre 求积公式程序，在电子计算机上实际计算下列反常积分值，并与精确值比较：

⑴ $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$，　（精确值$-\frac{\pi^2}{6}$）；

⑵ $\int_0^1 \ln x\ln(1-x)dx$，（精确值$2-\frac{\pi^2}{6}$）；

⑶ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x dx$，　（精确值$-\frac{\pi}{2}\ln 2$）；

⑷ $\int_0^{+\infty} \frac{\tan x}{x} dx$，　（精确值$\frac{\pi}{2}$）；

⑸ $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$，　（精确值$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$）。

习　　题　8.2

1. ⑴　证明比较判别法（定理 8.2.2）；

   ⑵　举例说明，当比较判别法的极限形式中 $l=0$ 或 $+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 的敛散性可以产生各种不同的的情况。

2. 证明 Cauchy 判别法及其极限形式（定理 8.2.3）。

3. 讨论下列非负函数反常积分的敛散性：

   ⑴ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3-e^{-2x}+\ln x+1}}dx$；　　⑵ $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^3}dx$；

   ⑶ $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x|\sin x|}dx$；　　⑷ $\int_1^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}dx$ （$p,q\in\mathbf{R}^+$）.

4. 证明：对非负函数 $f(x)$，$(\mathrm{cpv})\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛与 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛是等价的。

5. 讨论下列反常积分的敛散性（包括绝对收敛、条件收敛和发散，下同）：

   ⑴ $\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x dx$；　　⑵ $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ （$p\in\mathbf{R}^+$）；

   ⑶ $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx$ （$p\in\mathbf{R}^+$）；　　⑷ $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$；

   ⑸ $\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin x dx$ 　（$p_m(x)$ 和 $q_n(x)$ 分别是 m 和 n 次多项式，$q_n(x)$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 范围无零点。）

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 只有一个奇点 $x=b$，证明定理 8.2.3′ 和定理 8.2.5′。

7. 讨论下列非负函数反常积分的敛散性：

   ⑴ $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}dx$ ；　　⑵ $\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}dx$；

   ⑶ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$；　　⑷ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^p}dx$；

   ⑸ $\int_0^1|\ln x|^p dx$；　　⑹ $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ ；

   ⑺ $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|dx$.

8. 讨论下列反常积分的敛散性：

   ⑴ $\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$ （$p,q\in\mathbf{R}^+$）；　　⑵ $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$；

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$; (4) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p} dx$;

(5) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{x^p} dx$; (6) $\int_0^{+\infty} x^{p-1} \mathrm{e}^{-x} dx$;

(7) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$; (8) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx$.

9．讨论下列反常积分的敛散性：

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^2} dx$; (2) $\int_1^{+\infty} \frac{x^q \sin x}{1+x^p} dx$ （$p \geq 0$）;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin x} \cos x}{x^p} dx$; (4) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx$;

(5) $\int_0^1 \frac{1}{x^p} \cos \frac{1}{x^2} dx$ ； (6) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p} dx$ （$p>0$）.

10．证明反常积分 $\int_0^{+\infty} x \sin x^4 \sin x dx$ 收敛。

11．设 $f(x)$ 单调，且当 $x \to 0+$ 时 $f(x) \to +\infty$，证明：$\int_0^1 f(x) dx$ 收敛的必要条件是

$\lim\limits_{x\to 0+} xf(x) = 0$。

12．设 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛，且 $xf(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调减少，证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln x) f(x) = 0$。

13．设 $f(x)$ 单调下降，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，证明：若 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，则反常积分

$\int_0^{+\infty} f'(x) \sin^2 x \, dx$ 收敛。

14．设 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，证明 $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛。

15． 若 $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛，则称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上平方可积（类似可定义无界函数在 $[a, b]$ 上平方可积的概念）。

(1) 对两种反常积分分别探讨 $f(x)$ 平方可积与 $f(x)$ 的反常积分收敛之间的关系；

(2) 对无穷区间的反常积分，举例说明，平方可积与绝对收敛互不包含；

(3) 对无界函数的反常积分，证明：平方可积必定绝对收敛，但逆命题不成立。

16．证明反常积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx$$

当 $p \le \frac{1}{2}$ 时发散，当 $\frac{1}{2} < p \le 1$ 时条件收敛，当 $p > 1$ 时绝对收敛。