习　题 2.1

1. (1) 证明$\sqrt{6}$不是有理数；

   (2) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$是不是有理数?

2. 求下列数集的最大数、最小数，或证明它们不存在：

   $A=\{x\,|\,x\geq 0\}$；

   $B=\left\{\sin x\,\middle|\, 0<x<\dfrac{2\pi}{3}\right\}$；

   $C=\left\{\dfrac{n}{m}\,\middle|\, m,n\in\mathbf{N}^{+}\text{并且}n<m\right\}$。

3. A, B是两个有界集，证明：

   (1) $A\bigcup B$是有界集；

   (2) $S=\{x+y\,|\,x\in A, y\in B\}$也是有界集。

4. 设数集S有上界，则数集$T=\{x\,|-x\in S\}$有下界，且$\sup S=-\inf T$。

5. 证明有界数集的上、下确界唯一。

6. 对任何非空数集S，必有$\sup S\geq\inf S$。当$\sup S=\inf S$时，数集S有什么特点?

7. 证明有下界的数集必有下确界。

8. 设$S=\{x|\,x\in\mathbf{Q}\text{并且}x^2<3\}$，证明：

   (1) S没有最大数与最小数；

   (2) S在$\mathbf{Q}$内没有上确界与下确界。

习　题 2.2

1. 按定义证明下列数列是无穷小量：

   (1) $\left\{\dfrac{n+1}{n^2+1}\right\}$；

   (2) $\{(-1)^n(0.99)^n\}$；

   (3) $\left\{\dfrac{1}{n}+5^{-n}\right\}$；

   (4) $\left\{\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}\right\}$；

   (5) $\left\{\dfrac{n^2}{3^n}\right\}$；

   (6) $\left\{\dfrac{3^n}{n!}\right\}$；

(7) $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$；　　(8) $\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}\right\}$。

2. 按定义证明下述极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{3n^2+2}=\frac{2}{3}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}=1$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\frac{1}{2}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n+2}=1$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,其中 $x_n=\begin{cases}\frac{n+\sqrt{n}}{n}, & n\text{是偶数,}\\ 1-10^{-n}, & n\text{是奇数,}\end{cases}$。

3. 举例说明下列关于无穷小量的定义是不正确的：

(1) 对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 N，使当 $n>N$ 时成立 $x_n<\varepsilon$；

(2) 对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在无穷多个 x_n,使 $|x_n|<\varepsilon$。

4. 设 k 是一正整数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}=a$。

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

6. 设 $x_n\ge 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\ge 0$,证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$。

7. $\{x_n\}$是无穷小量，$\{y_n\}$是有界数列，证明$\{x_n y_n\}$也是无穷小量。

8. 利用夹逼法计算极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$。(提示：应用不等式 $2k>\sqrt{(2k-1)(2k+1)}$)。

9. 求下列数列的极限：

(1 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-1}{n^2+1}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2-3n+1}{2n^3-n+3}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+n^3}{3^{n+1}+(n+1)^3}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n^2+1}-1)\sin\dfrac{n\pi}{2}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n+1})$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}}$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\ln n}$；

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$。

10. 证明：若 $a_n>0$ （$n=1,2,\cdots$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

11．证明：若 $a_n>0$ （$n=1,2,\cdots$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$。

12. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$存在，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!\cdot a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0 \quad (a_i>0,\, i=1,2,\cdots,n)$。

(提示：设 $a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=nS_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k$)。

13. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab。$$

14. 设数列$\{a_n\}$满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a \quad (-\infty<a<+\infty)$。证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0。$$

习 题 2.3

1. 按定义证明下述数列为无穷大量：

(1) $\left\{\dfrac{n^2+1}{2n+1}\right\}$；　　(2) $\left\{\log_a\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$；

(3) $\{n-\arctan n\}$；　　(4) $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right\}$。

2. (1) 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (或 $-\infty$),按定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = +\infty\ (\text{或} -\infty\ );$$

(2) 设 $a_n>0$，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ，利用（1）证明：

$$\lim_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = 0。$$

3. 证明：

(1) 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量，$|\,y_n\,|\ge \delta > 0$，则 $\{x_n\, y_n\}$ 是无穷大量；

(2) 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量，$\lim_{n\to\infty} y_n = b\ne 0$，则 $\{x_n\, y_n\}$ 与 $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ 都是无穷大量。

4. (1) 利用 Stolz 定理，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}=\frac{4}{3}\ ;$$

(2) 求极限 $\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}-\frac{4}{3}\right]$。

5. 利用 Stolz 定理，证明：

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a>1)$；

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a>1$，$k$ 是正整数)。

6. (1) 在 Stolz 定理中，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} = \infty$，能否得出 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \infty$ 的结论?(考虑例子：

$x_n = (-1)^n n, y_n = n$)；

(2) 在 Stolz 定理中，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ 不存在，能否得出 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ 不存在的结论?

(考虑例子：$x_n = 1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n, y_n = n^2$)。

7. 设 $0<\lambda<1$，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ，证明

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2 a_{n-2}+\cdots+\lambda^n a_0)=\frac{a}{1-\lambda}。$$

8. 设 $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$,当 $n\to\infty$ 时有极限。$\{p_n\}$为单调递增的正数数列，且 $p_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$。证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0\ 。$$

(提示：先作代换$a_k=A_k-A_{k-1}$，再应用 Stolz 定理。)

习　题 2.4

1．利用$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$求下列数列的极限：

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$;　　(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$;

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$;　　(4) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$;

(5) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$。

2. 利用单调有界数列必定收敛的性质，证明下述数列收敛，并求出极限：

(1) $x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}, n=1,2,3,\cdots$；

(2) $x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$, $n=1,2,3,\cdots$；

(3) $x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\frac{-1}{2+x_n}, n=1,2,3,\cdots$；

(4) $x_1=1$,　$x_{n+1}=\sqrt{4+3x_n}, n=1,2,3,\cdots$；

(5) $0<x_1<1$,　$x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}, n=1,2,3,\cdots$；

(6) $0<x_1<1, x_{n+1}=x_n(2-x_n), n=1,2,3,\cdots$。

3. 利用递推公式与单调有界数列的性质，证明：

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{2n+1}=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\quad(a>1)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$。

4. 设$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{2}{x_n}\right)$，$n=1,2,3,\cdots$，分$x_1=1$与$x_1=-2$两种情况求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

5. 设$x_1=a, x_2=b, x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}+x_n}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

6. 给定$0<a<b$，令$x_1=a, y_1=b$。

(1) 若$x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}$，$y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，

证明$\{x_n\}$，$\{y_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$。这个公共极限称为$a$与$b$的**算术几何平均**；

(2) 若$x_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$，$y_{n+1}=\dfrac{2x_n y_n}{x_n+y_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，证明$\{x_n\}$,$\{y_n\}$收敛，且

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$。这个公共极限称为$a$与$b$的**算术调和平均**。

7. 设$x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$收敛，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

8. 设$\{x_n\}$是一单调数列，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的充分必要条件是：存在$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$。

9. 若有界数列$\{x_n\}$不收敛，则必存在两个子列$\{x_{n_k^{(1)}}\}$与$\{x_{n_k^{(2)}}\}$收敛于不同的极限，即$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k^{(1)}}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k^{(2)}}=b$，$a\neq b$。

10. 若数列$\{x_n\}$无界，但非无穷大量，则必存在两个子列$\{x_{n_k^{(1)}}\}$与$\{x_{n_k^{(2)}}\}$，其中$\{x_{n_k^{(1)}}\}$是无穷大量，$\{x_{n_k^{(2)}}\}$是收敛子列。

11. 设S是非空有上界的数集，$\sup S=a\,\overline{\in}\,S$。证明在数集$S$中可取出严格单调增加的数列$\{x_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

12. 设$\{(a_n,b_n)\}$是一列开区间，满足条件：

(1) $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots<b_2<b_1$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$。

证明存在唯一的实数ξ属于所有的开区间(a_n,b_n)，且$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$。

13. 利用 Cauchy 收敛原理证明下述数列收敛：

(1) $x_n = a_0+a_1q+a_2q^2+\cdots+a_nq^n$ （$|q|<1$，$|a_k|\le M$）；

(2) $x_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$。

14. (1) 设数列$\{x_n\}$满足条件$\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$，问$\{x_n\}$是否一定是基本数列。

(2) 设数列$\{x_n\}$满足条件$|x_{n+1}-x_n|<\frac{1}{2^n}$（$n=1,2,3,\cdots$）。证明$\{x_n\}$是基本数列。

15. 对于数列$\{x_n\}$构造数集A_k：

$$A_k=\{x_n\mid n\ge k\}=\{x_k,x_{k+1},\cdots\}。$$

记 $\operatorname{diam}A_k=\sup\{|x_n-x_m|，x_n\in A_k,x_m\in A_k\}$，证明数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}A_k=0。$$

16. 利用 Cauchy 收敛原理证明：单调有界数列必定收敛。(提示：采用反证法)。