第七章

第 1 节

5. (1) 可积. (2) 不可积. (3) 不可积. (4) 可积.

6. 提示: $\omega_i(\frac{1}{f}) \le \frac{1}{m^2}\omega_i(f)$.

8. 提示:

充分性: 设$|f(x)| \le M$. $\forall \varepsilon = \sigma > 0$, 存在划分$P$, 使得振幅$\omega_i \ge \varepsilon$的小区间的长度之和小于$\varepsilon$, 于是$\sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i < [2M + (b-a)]\varepsilon$;

必要性：如果存在$\varepsilon_0 > 0$与$\sigma_0 > 0$，对任意划分P，振幅$\omega_i \ge \varepsilon_0$的小区间的长度之和不小于$\sigma_0$, 于是$\sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i \ge \sigma_0 \varepsilon_0$ ，则当$\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i) \to 0$时，$\sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i$ 不趋于零.

9. 提示: 由于$g(u)$在$[A,B]$连续, 所以一致连续, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u', u'' \in [A,B]$, 只要$|u'-u''| < \delta$, 成立$|g(u') - g(u'')| < \varepsilon$. 另外设 $|g(u)| \le M$.

由于 $f(x)$在$[a,b]$可积, 由习题 8, 对上述$\varepsilon > 0$与$\delta > 0$, 存在划分P, 使得振幅$\omega_i(f) \ge \delta$的小区间的长度之和小于ε, 于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g \circ f)\Delta x_i < [2M + (b-a)]\varepsilon.$$

第 2 节

4. (1) $\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$. (2) $\int_1^2 x dx < \int_1^2 x^2 dx$.

(3) $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^x dx > \int_0^1 2^x dx$. (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$.

7. 提示: 原式可化为$\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x) - f(b)]dx = 0$，由此推出在$(a, \frac{a+b}{2})$上至少有一点$\eta$，满足 $f(\eta) - f(b) = 0$. 再对 $f(x)$在$[\eta, b]$上应用 Rolle 定理.

8. 提示：令 $x=\dfrac{t}{a}$， $\varphi(ax)=\psi(x)$，不等式化为 $f\left(\int_0^1\psi(x)dx\right)\le\int_0^1 f\left(\psi(x)\right)dx$. 对区间[0,1]作划分 P，任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，由 $f''(x)\ge 0$，利用Jensen不等式(第5.1节习题 24)，得到 $f\left(\sum_{i=1}^{n}\psi(\xi_i)\Delta x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}f\left(\psi(\xi_i)\right)\Delta x_i$，再令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\left(\Delta x_i\right)\to 0$，即得到所要证明的不等式.

9. 提示：设 $\int_0^1 f(x)dx=f(\xi)$， $\xi\in(0,1)$. 令 $F(\alpha)=\int_0^\alpha f(x)dx-\alpha\int_0^1 f(x)dx$，则 $F'(\alpha)=f(\alpha)-f(\xi)$. 当 $0<\alpha<\xi$ 时，$F(\alpha)$ 单调增加，当 $\xi<\alpha<1$ 时，$F(\alpha)$ 单调减少，由于 $F(0)=0$， $F(1)=0$，可知当 $\alpha\in[0,1]$ 时，

$$F(\alpha)=\int_0^\alpha f(x)dx-\alpha\int_0^1 f(x)dx\ge 0.$$

10. 提示：令 $F(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy-ab$，则 $F'(a)=f(a)-b$. 设 $f(T)=b$，则当 $0<a<T$ 时，$F(a)$ 单调减少，当 $a>T$ 时，$F(a)$ 单调增加，于是 $F(a)$ 在 $a=T$ 取最小值，而最小值为零，所以

$$F(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy-ab\ge 0.$$

11. 提示：对任意划分 P，设 $\delta=\min\limits_{1\le i\le n}\left(\Delta x_i\right)$. 当 $0<h<\delta$ 时，取 $\xi_i=x_{i-1}$；当 $-\delta<h<0$ 时，取 $\xi_i=x_i$. 于是 $\sum_{i=1}^{n}\left|f_h(\xi_i)-f(\xi_i)\right|\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i$.

12. 提示: (1) 由 $\int_a^b[\lambda f(x)-g(x)]^2dx\ge 0$，得到对一切实数 λ，成立

$$\lambda^2\int_a^b f^2(x)dx-2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx\ge 0,$$

所以该两次三项式的判别式不大于零.

(2) 不等式两边平方，利用(1)的结果.

13. 提示：设 $0<m\le g(x)\le M<+\infty$， $\max\limits_{a\le x\le b}f(x)=f(\xi)=A$，不妨设 $A>0$ （$A=0$ 时等式显然成立）. 对任意的 $0<\varepsilon<A$，取 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，使得 $\xi\in[\alpha,\beta]$，且当 $x\in[\alpha,\beta]$ 时，成立 $0<A-\varepsilon<f(x)\le A$，于是

$$\left[m(\beta-\alpha)(A-\varepsilon)^n\right]^{\frac{1}{n}} < \left\{\int_a^b [f(x)]^n g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}} \le \left[M(b-a)A^n\right]^{\frac{1}{n}}.$$

令 $n\to\infty$，得到 $A-\varepsilon \le \left\{\int_a^b [f(x)]^n g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}} \le A$，由 ε 的任意性，即得到所要证明的等式.

第 3 节

1. （1）$F'(x)=-f(x)$. （2）$F'(x)=\dfrac{f(\ln x)}{x}$. （3）$F'(x)=\dfrac{4\sin^2 x}{4+(x-\sin x\cos x)^2}$.

2. （1）1. （2）$2e$. （3）$\dfrac{\pi^2}{4}$. （4）0.

3. 提示: $\int_0^x tf(t)dt < x\int_0^x f(t)dt$.

4. 当 $x=1$，$f(x)$ 取极小值 $-\dfrac{17}{12}$.

5. （1）0.（2）0.

6. （1）$\dfrac{71}{105}$.（2）$\ln 2-\dfrac{1}{2}$.（3）$\dfrac{15}{2\ln 2}+\dfrac{70}{\ln 6}+\dfrac{40}{\ln 3}$.（4）$\dfrac{1}{88}$.（5）$\dfrac{1}{16}$.（6）$\dfrac{1}{2}\pi-1$.

   （7）0.（8）$\dfrac{1}{4}\pi-\dfrac{1}{32}\pi^2-\dfrac{1}{2}\ln 2$.（9）$\dfrac{1}{5}\left(3e^{\frac{\pi}{2}}-2\right)$.（10）$\dfrac{e}{2}(\sin 1-\cos 1)+\dfrac{1}{2}$.

   （11）$\dfrac{1}{12}(\pi+2\ln 2-2)$.（12）$\dfrac{2}{9}e^3+\dfrac{1}{2}e^2$.（13）$\dfrac{1}{4}(1-\ln 2)$.

   （14）$\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}e^{2\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}e^2$. （15）$\ln\left(\sqrt{1+e^2}-1\right)+\ln(\sqrt{2}+1)-1$.（16）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

   （17）$\dfrac{17}{3}-8\ln 2$；提示: 令 $t=x+1$.

   （18）$\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$；提示: 令 $t=x-\dfrac{1}{x}$，则 $\int_0^1 \dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int_{-\infty}^0 \dfrac{dt}{2+t^2}$.

   （19）$\ln(2+\sqrt{2})-\ln(\sqrt{3}+1)$. 提示：令 $x=\dfrac{1}{t}$ 或 $x=\tan t$.

   （20）$\dfrac{3}{4}\pi-2$. 提示: 令 $x=1+\sin t$.

7. （1）$\dfrac{1}{2}$.（2）$\dfrac{1}{p+1}$.（3）$\dfrac{2}{\pi}$.

8. （1） $\begin{cases} 0 & n\text{为奇数} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\pi & n\text{为偶数} \end{cases}$. （2） $\begin{cases} 0 & n\text{为奇数} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot 2\pi & n\text{为偶数} \end{cases}$.

（3） $a^{2n+1}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$. （4） $\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{(20)!!}{(21)!!}-\dfrac{(22)!!}{(23)!!}\right)$. (5) $\dfrac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}$.

（6） $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(e^2-1) & n=0 \\ \dfrac{1}{2}e^2\sum\limits_{k=0}^{n}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^k P_n^k+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot n! & n>0 \end{cases}$， 其中 P_n^k 为排列数.

提示: 利用递推公式 $I_n=\dfrac{1}{2}e^2-\dfrac{n}{2}I_{n-1}$ 及 $I_0=\dfrac{1}{2}(e^2-1)$.

10. (1) $\dfrac{3}{16}\pi^2$. (2) $\dfrac{1}{4}\pi^2$. (3) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi^2$.

11. (1) 285. (2) 0. (3) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}a & a\le 0 \\ \dfrac{1}{3}a^3-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{3} & 0<a<1 \\ \dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{3} & a\ge 1 \end{cases}$. (4) $14-\ln(7!)$.

13. $\ln\dfrac{e+1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e^4}$.

14. $f''(1)=2,\ f'''(1)=5$；提示: $f(x)=\dfrac{x^2}{2}\int_0^x g(t)dt-x\int_0^x tg(t)dt+\dfrac{1}{2}\int_0^x t^2 g(t)dt$.

15. $\dfrac{1}{e}$；提示: 对等式的两边求定积分，得到

$$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \ln x dx-(e-1)\int_1^e f(x)dx.$$

16．$\dfrac{5}{4}$； 提示：作变量代换 $u=2x-t$，将等式化为

$$2x\int_{2x-1}^{2x} f(u)du-\int_{2x-1}^{2x} uf(u)du=\frac{1}{2}\arctan x^2,$$

等式两边对 x 求导，再以 $x=1$ 代入.

17. $n^2\pi$.

18. $\dfrac{2}{\pi}$.

19. 提示: $g'(x)=af(ax)-f(x)\equiv 0$，令 $x=1$，得到对任何 a，有 $f(a)=\dfrac{f(1)}{a}$.

20. 提示：积分 $\int_1^4 f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\right)\dfrac{\ln x-\ln 2}{x}dx$

$$=\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{\ln x-\ln 2}{x}dx+\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{\ln x-\ln 2}{x}dx$$

对上面两积分中任意一个作变量代换 $x=\dfrac{4}{t}$.

21. 提示: $\max|f(x)|=(\max|f(x)|-\min|f(x)|)+\min|f(x)|$.

设 $\max|f(x)|=|f(\xi)|$，$\min|f(x)|=|f(\eta)|$，则

$$\max|f(x)|-\min|f(x)|=|f(\xi)|-|f(\eta)|\le|f(\xi)-f(\eta)|=\left|\int_\eta^\xi f'(x)dx\right|\le\int_a^b|f'(x)|dx;$$

设 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(\varsigma)$，则 $\min|f(x)|\le|f(\varsigma)|=\left|\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$.

22. 提示: 令 $F(x)=\int_0^x f(u)(x-u)du-\int_0^x\left\{\int_0^u f(x)dx\right\}du$，显然 $F(0)=0$，只须证明

$F'(x)\equiv 0$.

23. 提示:

$$f(x)=f\left(\frac{a}{2}\right)+f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\ge f\left(\frac{a}{2}\right)+f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right),$$

对不等式两边积分.

注. 本题也可直接利用 7.2 节习题 8 的结果，取 $\varphi(t)=t$.

24. 提示:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\le f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right),$$

将 x 换成 x^2，再对不等式两边积分.

注. 本题也可直接利用当 $f''(x)\le 0$ 时与 7.2 节习题 8 相对应的结果，取

$a=1$ ，$\varphi(t)=t^2$.

25. 提示: $\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx+\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx\right)$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left(f\left(\frac{2k\pi+t}{n}\right)-f\left(\frac{(2k+1)\pi+t}{n}\right)\right)\sin t dt\ge 0.$$

26. 提示: 设 $g(x)=\int_0^x f(x)dx$，则 $g(0)=0, g(\pi)=0$．再令 $h(x)=\int_0^x g(x)\sin xdx$，则 $h(0)=0$，$h(\pi)=\int_0^{\pi} g(x)\sin xdx=\int_0^{\pi} f(x)\cos xdx=0$．对 $h(x)$ 应用 Rolle 定理，可知存在 $\eta\in(0,\pi)$，使得 $h'(\eta)=g(\eta)\sin\eta=0$，即 $g(\eta)=0$．再对 $g(x)$ 应用 Rolle 定理，可知存在 $\xi_1\in(0,\eta)$，$\xi_2\in(\eta,\pi)$，使得 $f(\xi_1)=0$，$f(\xi_2)=0$．

第 4 节

1. （1）$\frac{3}{2}-\ln 2$．（2）$\frac{16}{3}$．（3）$\frac{\pi}{2}$．（4）$e+\frac{1}{e}-2$．（5）$\frac{99}{10}\ln 10-\frac{81}{10}$．
   （6）$\frac{8}{15}$．（7）$\frac{3}{8}\pi a^2$．（8）$\frac{4}{3}\pi^3 a^2$．（9）$\frac{1}{4}\left(e^{4\pi}-1\right)a^2$．（10）$\frac{1}{2}\pi a^2+\pi b^2$．
   （11）π．（12）a^2．（13）$\frac{1}{2}\pi a^2$．
   （14）$\frac{3}{2}a^2$；提示：令 $x=\frac{at}{1+t^3}$，$y=\frac{at^2}{1+t^3}$，$t:0\to+\infty$．
   （15）$\sqrt{2}\pi a^2$；提示：将曲线方程化成极坐标方程 $r^2=\frac{2a^2}{2-\sin^2 2\theta}$．

2. 提示: 取焦点 $(a,0)$ 为极点，x 轴为极轴，则抛物线的极坐标方程为 $r=\frac{2a}{1-\cos\theta}$．求面积函数 $A(\theta)=\frac{1}{2}\int_{\theta}^{\theta+\pi}\frac{4a^2}{(1-\cos\theta)^2}d\theta$ 的极值点，由 $A'(\theta)=0$ 可得到 $\theta=\frac{\pi}{2}$．

3. (1) $\frac{80\sqrt{10}-8}{27}$. (2) $\frac{1}{4}(e^2+1)$. (3) $\ln(\sec a+\tan a)$. (4) $6a$. (5) $2\pi^2 a$. (6) $8a$.
(7) $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$. (8) $\frac{3\pi a}{2}$.

4. $\left(\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a,\frac{3}{2}a\right)$.

5. (1) $\frac{\pi h}{6}(2AB+2ab+Ab+aB)$. (2) $\frac{4}{3}\pi abc$. (3) $\frac{16}{3}a^3$. (4) $\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{8}{9}\right)a^3$.

6. 提示: (1) 作区间$[a,b]$的划分$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，则关于小区域$\{(x,y) | x_{i-1} \le x \le x_i, 0 \le y \le f(x)\}$ 绕 y 轴旋转所得的体积有

$$\Delta V_i \approx \pi(x_i^2 - x_{i-1}^2) f(x_i) \approx 2\pi x_i f(x_i).$$

(2) 设$x = r(\theta)\cos\theta$，$y = r(\theta)\sin\theta$，$a = r(\alpha)\cos\alpha$，$b = r(\beta)\cos\beta$. 则

$$\begin{aligned}
V &= \int_b^a \pi y^2 dx - \frac{1}{3}\pi a r^2(\alpha)\sin^2\alpha + \frac{1}{3}\pi b r^2(\beta)\sin^2\beta \\
&= \int_b^a \pi y^2 dx + \frac{1}{3}\pi\int_a^b d(y^2 x) \\
&= \int_\beta^\alpha \pi r^2 \sin^2\theta (r'\cos\theta - r\sin\theta) d\theta \\
&\quad + \frac{1}{3}\pi\int_\alpha^\beta \left(3r^2 r'\sin^2\theta\cos\theta + 2r^3\sin\theta\cos^2\theta - r^3\sin^3\theta\right) d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta.
\end{aligned}$$

7. (1) $\frac{4}{3}\pi ab^2$. (2) (i) $\frac{1}{2}\pi^2$, (ii) $2\pi^2$. (3) $\frac{32}{105}\pi a^3$. (4) (i) $6\pi^2 a^3$, (ii) $7\pi^2 a^3$.

(5) $2\pi^2 a^2 b$. (6) $\frac{8}{3}\pi a^3$. (7) $\frac{\pi}{15}(e^{3\pi}+1)a^3$. (8) $\frac{\pi}{4}\left[\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1) - \frac{2}{3}\right]a^3$.

8. $2a^5 - 10a^2c^3 + 15ac^4 - 6c^5 = 0$.

9. $a = 1$.

10. $b\sqrt{1 - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}}$.

11. (1) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$(S_1 + S_2)_{\min} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$； (2) $\frac{1}{30}(\sqrt{2}+1)\pi$.

12. 提示：(1) 对$xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$两边关于$x$在$[0,1]$上积分，由$\int_0^1 f(x)dx = 2$，得到 $f(1) = 4 + \frac{a}{2}$. 又因为 $xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$ 可化为 $(\frac{f}{x})' = \frac{3a}{2}$，结合 $f(1) = 4 + \frac{a}{2}$，解得 $f(x) = \frac{3a}{2}x^2 + (4-a)x$，其中常数$a \in [-8,4]$.

(2) $\pi\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{\pi}{30}(a^2 + 10a + 160)$，可知当$a = -5$时区域$S$绕$x$轴旋转所得的旋转体体积最小.

13. (1) $\frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right]$. (2) $2\sqrt{2}\pi + 2\pi\ln(\sqrt{2}+1)$.

(3) $\begin{cases} 2\pi b^2 + \dfrac{2\pi a^2 b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \dfrac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a} & a < b \\ 4\pi ab & a = b \\ 2\pi b^2 + \dfrac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} & a > b \end{cases}$.

(4) $\frac{12}{5}\pi a^2$. (5) $\frac{32}{5}\pi a^2$. (6) (i) $(4-2\sqrt{2})\pi a^2$; (ii) $2\sqrt{2}\pi a^2$.

14. $\frac{11\sqrt{5}-1}{6}\pi$.

16. (1) $K=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $R=2\sqrt{2}$. (2) $K=\frac{\sqrt{2}}{4a}$, $R=2\sqrt{2}a$.

17. (1) $K=\frac{\sqrt{p}}{(2x+p)^{\frac{3}{2}}}$, $R=\frac{(2x+p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}$.

(2) $K=\frac{a^4 b}{\left[(a^2+b^2)x^2-a^4\right]^{\frac{3}{2}}}$, $R=\frac{\left[(a^2+b^2)x^2-a^4\right]^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}$.

(3) $K=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{|axy|}}$, $R=3\cdot\sqrt[3]{|axy|}$.

(4) $K=\frac{1}{at}$, $R=at$.

18. $(x-3)^2+(y+2)^2=8$.

第 5 节

1. 75mg.

2. $\frac{5\sqrt{5}-1}{6}q$.

3. 5.4×10^7 N.

4. $2\pi^2 b\rho\sqrt{a^2+b^2}$.

5. 1.04×10^9 J.

6. $\frac{4}{3}\pi g r^4(2\rho-\rho_{水})$.

7. $\frac{4}{3}\pi\rho\omega^2 r^4$.

8. $9\,\mathrm{J}$.

9. $-\left(\frac{729}{7}T^7-\frac{243}{5}T^5+9T^3-T-\frac{2224}{35}\right)k$.

10. $\frac{1}{3\sqrt{g}}\times 10^5\,\mathrm{s}=1.06\times 10^4\,\mathrm{s}$.

11. 容器改为由曲线 $y=cx^4$ 绕 y 轴旋转所得的旋转曲面.

12. $Q=Q_0\cdot 2^{-\frac{t-t_0}{1600}}$.

13. $y(t)=\sqrt{\frac{18}{400}t+\frac{1}{25}}$，$(0\le t\le \frac{64}{3})$. 提示：设 B 物质的浓度为 $y(t)$，则

$dy=\frac{k}{y}dt$，解得 $y(t)=\sqrt{2kt+c}$. 由 $y(0)=\frac{1}{5}$ 与 $y(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，得到 $k=\frac{9}{400}, c=\frac{1}{25}$.

14. $P(t)=P_{\max}-(P_{\max}-P(t_0))e^{-\lambda(t-t_0)}$.

提示：$P(t)$ 满足方程 $dP=\lambda(P_{\max}-P(t))dt$.

15. 提示：由 $dN=kNdt$ 与 $N(0)=N_0$，解得 $N(t)=N_0e^{kt}$.

16. $1000\ln 2\,\mathrm{m}$. 提示：设废气浓度为 $y(t)$，则 $dy=-\frac{1}{1000}y(t)dt$，解得

$y(t)=\frac{a}{100}e^{-\frac{t}{1000}}$.