习　　题　14.1

1. 求下列第一类曲线积分：

(1) $\int\limits_{\mathbf{L}}(x+y)ds$，其中$\mathbf{L}$是以$O(0,0),\ A(1,0),\ B(0,1)$为顶点的三角形；

(2) $\int\limits_{\mathbf{L}}|y|\,ds$，其中$\mathbf{L}$为单位圆周$x^2+y^2=1$；

(3) $\int\limits_{\mathbf{L}}|x|^{1/3}\,ds$，其中$\mathbf{L}$为星形线$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$；

(4) $\int\limits_{\mathbf{L}}|x|\,ds$，其中$\mathbf{L}$为双纽线$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$；

(5) $\int\limits_{\mathbf{L}}(x^2+y^2+z^2)ds$，$\mathbf{L}$为螺旋线$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ 0\le t\le 2\pi$；的一段：

(6) $\int\limits_{\mathbf{L}}xyzds$。其中$\mathbf{L}$为曲线$x=t,\ y=\dfrac{2\sqrt{2t^3}}{3},\ z=\dfrac{1}{2}t^2$上相应于$t$从 0 变到 1 的一段弧；

(7) $\int\limits_{\mathbf{L}}(xy+yz+zx)ds$，其中$\mathbf{L}$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$和平面$x+y+z=0$的交线。

2. 求椭圆周$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$的质量，已知曲线在点$M(x,y)$处的线密度是$\rho(x,y)=|y|$。

3. 求下列曲面的面积：

(1) $z=axy$包含在圆柱面$x^2+y^2=a^2\quad(a>0)$内的部分；

(2) 锥面$x^2+y^2=\dfrac{1}{3}z^2$被平面$x+y+z=2a\quad(a>0)$所截的部分；

(3) 球面$x^2+y^2+z^2=a^2$包含在锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$内的部分；

(4) 圆柱面$x^2+y^2=a^2$被两平面$x+z=0,\ x-z=0\ (x>0,\ y>0)$所截部分；

(5) 抛物面$x^2+y^2=2az$包含在柱面$(x^2+y^2)^2=2a^2xy\ (a>0)$内的那部分；

(6) 环面$\begin{cases}x=(b+a\cos\phi)\cos\varphi,\\ y=(b+a\cos\phi)\sin\varphi,\\ z=a\sin\phi,\end{cases}\quad 0\le\phi\le 2\pi,0\le\varphi\le 2\pi$，其中$0<a<b$。

4. 求下列第一类曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中$\Sigma$是左半球面$x^2+y^2+z^2=a^2$，$y\le 0$；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中$\Sigma$是区域$\{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$的边界；

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$，$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$所截部分；

(4) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}dS$，其中$\Sigma$是圆柱面$x^2+y^2=a^2$介于平面$z=0$与$z=H$之间的部分；

(5) $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)dS$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$；

(6) $\iint\limits_{\Sigma}(x^3+y^2+z)dS$，其中$\Sigma$是抛物面$2z=x^2+y^2$介于平面$z=0$与$z=8$之间的部分；

(7) $\iint\limits_{\Sigma}zdS$，其中Σ是螺旋面$x=u\cos v, y=u\sin v, z=v, 0\le u\le a$，$0\le v\le 2\pi$ 的一部分。

5．设球面Σ的半径为R，球心在球面$x^2+y^2+z^2=a^2$上。问当R何值时，Σ在球面$x^2+y^2+z^2=a^2$内部的面积最大？并求该最大面积。

6. 求密度为$\rho(x,y)=z$的抛物面壳$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2), 0\le z\le 1$的质量与重心。

7．求均匀球面（半径是a，密度是 1）对不在该球面上的质点（质量为 1）的引力。

8．设$u(x,y,z)$为连续函数，它在$M(x_0,y_0,z_0)$处有连续的二阶导数。记Σ为以M点为中心，半径为R的球面，以及

$$T(R)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Sigma}u(x,y,z)dS。$$

（1）证明：$\lim\limits_{R\to 0}T(R)=u(x_0,y_0,z_0)$；

（2）若$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}\ne 0$，求当$R\to 0$时无穷小量$T(R)-u(x_0,y_0,z_0)$的主要部分。

9．设Σ为上半椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$（$z\ge 0$），$\pi$为$\Sigma$在点$P(x,y,z)$处的切平面，$\rho(x,y,z)$为原点$O(0,0,0)$到平面$\pi$的距离，求$\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS$。

10．设Σ是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$。证明

$$\iint\limits_{\Sigma}f(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du,$$

其中a,b,c为不全为零的常数，$f(u)$是$|u|\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}$上的一元连续函数。

11．设有一高度为$h(t)$（t为时间）的雪堆在溶化过程中，其侧面满足方程（设长度单位为 cm，时间单位为 h）

$$z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}。$$

已知体积减少的速率与侧面积成正比（比例系数 0.9）。问高度为 130cm 的雪堆全部融化需多少时间？

习　题　14.2

1.　求下列第二类曲线积分：

（1）$\int\limits_{\mathbf{L}}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，其中$\mathbf{L}$是以$A(1,0), B(2,0), C(2,1), D(1,1)$为顶点的正方形，方向为逆时针方向；

（2） $\int_{\mathbf{L}}(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$，其中 **L** 是抛物线的一段：$y=x^2,-1\le x\le 1$，方向由 $(-1,1)$ 到 $(1,1)$；

（3） $\int_{\mathbf{L}}\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 **L** 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，方向为逆时针方向；

（4） $\int_{\mathbf{L}}ydx-xdy+(x^2+y^2)dz$，其中 **L** 是曲线 $x=e^t,\ y=e^{-t},\ z=a^t$，$0\le t\le 1$，方向由 (e,e^{-1},a) 到 $(1,1,1)$；

（5） $\int_{\mathbf{L}}xdx+ydy+(x+y-1)dz$，**L** 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的直线段；

（6） $\int_{\mathbf{L}}ydx+zdy+xdz$，**L** 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2az,\\ x+z=a\quad(a>0),\end{cases}$ 若从 z 轴的正向看去，**L** 的方向为逆时针方向；

（7） $\int_{\mathbf{L}}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，**L** 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ y=x\tan\alpha\ \ (0<\alpha<\pi),\end{cases}$ 若从 x 轴的正向看去，这个圆周的方向为是逆时针方向。

2. 证明不等式

$$\left|\int_{\mathbf{L}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|\le MC,$$

其中 C 是曲线 **L** 的弧长，$M=\max\{\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\,|(x,y)\in\mathbf{L}\}$。记圆周 $x^2+y^2=R^2$ 为 $\mathbf{L}_R$，利用以上不等式估计

$$I_R=\int_{\mathbf{L}_R}\frac{ydx-xdy}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2},$$

并证明

$$\lim_{R\to+\infty}I_R=0。$$

3. 方向依纵轴的负方向，且大小等于作用点的横坐标的平方的力构成一个力场。求质量为 m 的质点沿抛物线 $y^2=1-x$ 从点 $(1,0)$ 移到 $(0,1)$ 时，场力所作的功。

4. 计算下列第二类曲面积分：

（1） $\iint_{\Sigma}(x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy$，其中 Σ 是中心在原点，边长为 $2h$ 的立方体 $[-h,h]\times[-h,h]\times[-h,h]$ 的表面，方向取外侧；

（2） $\iint_{\Sigma}yzdzdx$，其中 Σ 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部分，方向取上侧；

（3） $\iint_{\Sigma}zdydz+xdzdx+ydxdy$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 和 $z=4$ 所截部分，方向取外侧；

（4） $\iint_{\Sigma}zxdydz+3dxdy$，其中 Σ 是抛物面 $z=4-x^2-y^2$ 在 $z\ge 0$ 部分，方向取下侧；

（5） $\iint_{\Sigma}\left[f(x,y,z)+x\right]dydz+\left[2f(x,y,z)+y\right]dzdx+\left[f(x,y,z)+z\right]dxdy$，其

中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分，方向取上侧；

（6） $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+5)dxdy$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$（$0\le z\le h$），方向取下侧。

（7） $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx$，其中 Σ 是抛物面 $y=x^2+z^2$ 与平面 $y=1$，$y=2$ 所围立体的表面，方向取外侧。

（8） $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{1}{x}dydz+\dfrac{1}{y}dzdx+\dfrac{1}{z}dxdy$，其中 Σ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，方向取外侧；

（9） $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，方向取外侧。

习　题　14.3

1．利用 Green 公式计算下列积分：

（1） $\int\limits_{L}(x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy$，其中 $\mathbf{L}$ 是以 $A(1,1), B(3,2), C(2,5)$ 为顶点的三角形的边界，逆时针方向；

（2） $\int\limits_{L} xy^2dx-x^2ydy$，其中 $\mathbf{L}$ 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，逆时针方向；

（3） $\int\limits_{L}\left(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x\right)dx+\left(x^2\sin x-2ye^x\right)dy$，其中 $\mathbf{L}$ 是星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$，逆时针方向；

（4） $\int\limits_{L} e^x\left[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy\right]$，其中 $\mathbf{L}$ 是曲线 $y=\sin x$ 上从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段；

（5） $\int\limits_{L}\left(x^2-y\right)dx-\left(x+\sin^2 y\right)dy$，其中 $\mathbf{L}$ 是圆周 $x^2+y^2=2x$ 的上半部分，方向从点 $(0,0)$ 到点 $(2,0)$；

（6） $\int\limits_{L}\left[e^x\sin y-b(x+y)\right]dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$，其中 a,b 是正常数，$\mathbf{L}$ 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的一段；

（7） $\int\limits_{L}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 $\mathbf{L}$ 是以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周（$R>1$），逆时针方向；

（8） $\int\limits_{L}\dfrac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$，其中 $\mathbf{L}$ 为单位圆周 $x^2+y^2=1$，逆时针方向；

（9） $\int\limits_{L}\dfrac{e^x\left[(x\sin y-y\cos y)dx+(x\cos y-y\sin y)dy\right]}{x^2+y^2}$，其中 $\mathbf{L}$ 是包围原点的

简单光滑闭曲线，逆时针方向。

2．利用曲线积分，求下列曲线所围成的图形的面积：

（1） 星形线 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ ；

（2） 抛物线 $(x+y)^2 = ax\ (a>0)$ 与 x 轴；

（3） 旋轮线的一段：$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases}$ $t \in [0,2\pi]$ 与 x 轴。

3. 先证明曲线积分与路径无关，再计算积分值：

（1） $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$ ；

（2） $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \varphi(x)dx + \phi(y)dy$ ，其中 $\varphi(x), \phi(y)$ 为连续函数；

（3） $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ，沿不通过原点的路径。

4．证明 $(2x\cos y + y^2\cos x)dx + (2y\sin x - x^2\sin y)dy$ 在整个 xy 平面上是某个函数的全微分，并找出这样一个原函数。

5．证明 $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 在除去 y 的负半轴及原点的裂缝 xy 平面上是某个函数的全微分，并找出这样一个原函数。

6．设 $Q(x,y)$ 在 xy 平面上具有连续偏导数，曲线积分 $\int_L 2xydx + Q(x,y)dy$ 与路径无关，并且对任意 t 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + Q(x,y)dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + Q(x,y)dy$ ，求 $Q(x,y)$ 。

7．确定常数 λ ，使得右半平面 $x>0$ 上的向量函数 $\boldsymbol{r}(x,y) = 2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}$ $- x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并求 $u(x,y)$ 。

8．设一力场为 $\boldsymbol{F} = (3x^2y+8xy^2)\boldsymbol{i} + (x^3+8x^2y+12ye^y)\boldsymbol{j}$ ，证明质点在此场内移动时，场力所作的功与路径无关。

9．利用 Gauss 公式计算下列曲面积分：

（1） $\iint_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$ ，Σ 为立方体 $0 \le x,y,z \le a$ 的表面,方向取外侧；

（2） $\iint_{\Sigma} (x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx + (z-x+y)dxdy$ ，其中 Σ 为闭曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$，方向取外侧；

（3） $\iint_{\Sigma} \left(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma\right)dS$ ，其中 Σ 为锥面 $z^2 = x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=h\ (h>0)$ 之间的部分，方向取下侧；

（4） $\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$ ，其中 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ ，方向取上侧；

（5） $\iint_{\Sigma} 2(1-x^2)dydz + 8xydzdx - 4zxdxdy$ ，其中 Σ 是由 xy 平面上的曲线 $x = e^y\ (0 \le y \le a)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转面，曲面的法向量与 x 轴的正向的夹角为钝角。

（6） $\iint_{\Sigma} (2x+z)dydz + zdxdy$ ，其中 Σ 是曲面 $z = x^2+y^2$ （$0 \le z \le 1$），曲面的法向量与 z 轴的正向的夹角为锐角；

(7) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{axdydz+(a+z)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$（$a>0$），其中$\Sigma$是下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，方向取上侧；

(8) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中$\Sigma$是

i）椭球面$x^2+2y^2+3z^2=1$，方向取外侧；

ii）抛物面$1-\dfrac{z}{5}=\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}\quad(z\geq 0)$，方向取上侧。

10． 利用 Gauss 公式证明阿基米德原理：将物体全部浸没在液体中时，物体所受的浮力等于与物体同体积的液体的重量，而方向是垂直向上的。

11．设某种流体的速度场为$\boldsymbol{v}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$，求单位时间内流体

(1) 流过圆柱：$x^2+y^2\leq a^2,\quad 0\leq z\leq h$的侧面（方向取外侧）的流量；

(2) 流过该圆柱的全表面（方向取外侧）的流量。

12．利用 Stokes 公式计算下列曲线积分：

(1) $\int\limits_{\mathbf{L}}ydx+zdy+xdz$，其中$\mathbf{L}$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$与平面$x+y+z=0$的交线（它是圆周），从$x$轴的正向看去，此圆周的方向是逆时针方向；

(2) $\int\limits_{\mathbf{L}}3zdx+5xdy-2ydz$，其中$\mathbf{L}$是圆柱面$x^2+y^2=1$与平面$z=y+3$的交线（它是椭圆），从$z$轴的正向看去，是逆时针方向；

(3) $\oint\limits_{\mathbf{L}}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中$\mathbf{L}$为圆柱面$x^2+y^2=a^2$和平面$\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1\ \ (a>0,h>0)$的交线（它是椭圆），从$x$轴的正向看去，是逆时针方向；

(4) $\int\limits_{\mathbf{L}}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，其中$\mathbf{L}$是用平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}$截立方体$0\leq x,y,z\leq 1$的表面所得的截痕，从$x$轴的正向看去，是逆时针方向；

(5) $\int\limits_{\mathbf{L}}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$，其中$\mathbf{L}$是沿着螺线

$x=a\cos\varphi,\ \ y=a\sin\varphi,\ z=\dfrac{h}{2\pi}\varphi$从点$A(a,0,0)$至点$B(a,0,h)$的路径；

(6) $\int\limits_{\mathbf{L}}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$，其中$\mathbf{L}$是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线，从$z$轴的正向看去，是逆时针方向。

13．设$f(t)$是$\mathbf{R}$上恒为正值的连续函数，$\mathbf{L}$是逆时针方向的圆周$(x-a)^2+(y-a)^2=1$。证明

$$\int\limits_{\mathbf{L}}xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\geq 2\pi\text{。}$$

14．设$\mathbf{D}$为两条直线$y=x$，$y=4x$和两条双曲线$xy=1$，$xy=4$所围成的区域，$F(u)$是具有连续导数的一元函数，记$f(u)=F'(u)$。证明

$$\int\limits_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}dy=\ln 2\int_1^4 f(u)du\text{，}$$

其中∂D的方向为逆时针方向。

15．证明：若Σ为封闭曲面，$\boldsymbol{l}$为一固定向量，则

$$\iint_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})dS = 0,$$

其中$\boldsymbol{n}$为曲面Σ的单位外法向量。

16．设区域Ω由分片光滑封闭曲面Σ所围成。证明：

$$\iiint_{\Omega}\frac{dxdydz}{r} = \frac{1}{2}\iint_{\Sigma}\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})dS,$$

其中$\boldsymbol{n}$为曲面Σ的单位外法向量，$\boldsymbol{r} = (x,y,z)$， $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 。

17．设函数$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$和$R(x,y,z)$在$\mathbf{R}^3$上具有连续偏导数。且对于任意光滑曲面Σ，成立

$$\iint_{\Sigma}Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = 0。$$

证明：在$\mathbf{R}^3$上，$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\equiv 0$。

18．设$\mathbf{L}$是平面$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$上的简单闭曲线，它所包围的区域$\mathbf{D}$的面积为$S$，其中$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是平面取定方向上的单位向量。证明

$$S = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{L}}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

其中$\mathbf{L}$的定向与平面的定向符合右手定则。

习　　题　14.4

1. 计算下列微分形式的外微分：

（1）1-形式$\omega = 2xydx + x^2dy$；

（2）1-形式$\omega = \cos ydx - \sin xdy$；

（3）2-形式$\omega = 6zdx\wedge dy - xydx\wedge dz$。

2. 设$\omega = a_1(x_1)dx_1 + a_2(x_2)dx_2 + \cdots + a_n(x_n)dx_n$是$\mathbf{R}^n$上的1-形式，求$d\omega$。

3. 设$\omega = a_1(x_2,x_3)dx_2\wedge dx_3 + a_2(x_1,x_3)dx_3\wedge dx_1 + a_3(x_1,x_2)dx_1\wedge dx_2$是$\mathbf{R}^3$上的2-形式，求$d\omega$。

4. 设在$\mathbf{R}^3$上在一个开区域$\Omega = (a,b)\times(c,d)\times(e,f)$上定义了具有连续导数的函数$a_1(z)$，$a_2(x)$，$a_3(y)$，试求形如

$$\omega = b_1(y)dx + b_2(z)dy + b_3(x)dz$$

的1-形式ω，使得

$$d\omega = a_1(z)dy\wedge dz + a_2(x)dz\wedge dx + a_3(y)dx\wedge dy\ 。$$

5．设$\omega = \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}dx_i\wedge dx_j$ （$a_{ij} = -a_{ji}$，$i,j = 1,2,\cdots,n$）是$\mathbf{R}^n$上的2-形式，证明

$$d\omega = \frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right)dx_i\wedge dx_j\wedge dx_k。$$

习　题　14.5

1. 设$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+20\boldsymbol{j}-15\boldsymbol{k}$，对下列数量场$f(x,y,z)$，分别计算$\mathrm{grad}\,f$和$\mathrm{div}(f\boldsymbol{a})$：

   (1) $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$；

   (2) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$；

   (3) $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$。

2. 求向量场$\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$穿过球面$x^2+y^2+z^2=1$在第一卦限部分的通量，其中球面在这一部分的定向为上侧。

3. 设$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，求：

   (1) 满足$\mathrm{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=0$的函数$f(r)$；

   (2) 满足$\mathrm{div}[\mathrm{grad}\,f(r)]=0$的函数$f(r)$。

4. 计算

$$\mathrm{grad}\left\{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\ln(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\right\}$$

   其中$\boldsymbol{c}$是常矢量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，且$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}>0$。

5. 计算向量场$\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)$沿下列定向曲线的环量：

   (1) 圆周$(x-2)^2+(y-2)^2=1, z=0$，定向为逆时针方向；

   (2) 圆周$x^2+y^2=4, z=1$，定向为顺时针方向。

6. 计算向量场$\boldsymbol{r}=xyz(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$在点$M(1,3,2)$处的旋度，以及在这点沿方向$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$的环量面密度。

7. 设$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$向量场，$f(x,y,z)$为数量场，证明：(假设函数$a_x,a_y,a_z$和$f$具有必要的连续偏导数)

   (1) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a})=0$；

   (2) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\ f)=\boldsymbol{0}$；

   (3) $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{a})-\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a})=\Delta\boldsymbol{a}$。

8. 位于原点的点电荷q产生的静电场的电场强度为$\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\varepsilon_0$为真空介电常数。求$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}$。

9. 设$\boldsymbol{a}$为常向量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，验证：

   (1) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=0$；

   (2) $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=2\boldsymbol{a}$；

   (3) $\nabla\cdot((\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a})=2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}$。

10. 求全微分$(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$的原函数。

11. 证明向量场$\mathbf{a}=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\dfrac{x+y}{x^2+y^2}\mathbf{j}\quad(x>0)$是有势场并求势函数。

12. 证明向量场$\boldsymbol{a}=(2x+y+z)yz\boldsymbol{i}+(x+2y+z)zx\boldsymbol{j}+(x+y+2z)xy\boldsymbol{k}$是有势场，并求出它的势函数。

13. 验证：

   (1) $u=y^3-3x^2y$为平面$\mathbf{R}^2$上的调和函数；

   (2) $u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$为$\mathbf{R}^2\setminus\{(a,b)\}$上的调和函数；

（3） $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 为 $\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ 上的调和函数。

14. 设 $u(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上具有二阶连续偏导数，证明 u 是调和函数的充要条件为：对于 $\mathbf{R}^2$ 中任意光滑封闭曲线 C，成立 $\int_C \dfrac{\partial u}{\partial n}ds=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 为沿 C 的外法线方向的方向导数。

15. 设 $u=u(x,y)$ 与 $v=v(x,y)$ 都为平面上的调和函数。置 $F=\sqrt{u^2+v^2}$ 。证明当 $p\geq 2$ 时，在 $F\neq 0$ 的点成立

$$\Delta(F^p)\geq 0。$$

16. 设 $\mathbf{B}=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq 1\}$，$\mathbf{F}(x,y,z)$ ：$\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 为具有连续导数的向量值函数，且满足

$$\mathbf{F}\big|_{\partial\mathbf{B}}\equiv(0,0,0)，\ \nabla\cdot\mathbf{F}\big|_{\mathbf{B}}\equiv 0。$$

证明：对于任何 $\mathbf{R}^3$ 上具有连续偏导数的函数 $g(x,y,z)$ 成立

$$\iiint_{\mathbf{B}}\nabla g\cdot\mathbf{F}dxdydz=0。$$

17. 设 $\mathbf{D}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2<1\}$，$u(x,y)$ 在 $\overline{\mathbf{D}}$ 上具有连续二阶偏导数。进一步，设 u 在 $\overline{\mathbf{D}}$ 上不恒等于零，但在 $\mathbf{D}$ 的边界 $\partial\mathbf{D}$ 上恒为零，且在 $\mathbf{D}$ 上成立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda u \quad（\lambda \text{ 为常数}）。$$

证明

$$\iint_{\mathbf{D}}\|\mathrm{grad}\,u\|^2dxdy+\lambda\iint_{\mathbf{D}}u^2dxdy=0。$$

18. 设区域 Ω 由分片光滑封闭曲面 Σ 所围成，$u(x,y,z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上具有二阶连续偏导数，且在 $\overline{\Omega}$ 上调和，即满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$。

（1）证明

$$\iint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0，$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的单位外法向量；

（2）设 $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ 为一定点，证明

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS，$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，$r=|\boldsymbol{r}|$.