第二章

第 1 节

1．(1) 反证法。若$\sqrt{6}$是有理数，则可写成既约分数$\sqrt{6}=\dfrac{m}{n}$。由$m^2=6n^2$，可知m是偶数，设$m=2k$，于是有$3n^2=2k^2$，从而得到n是偶数，这与$\dfrac{m}{n}$是既约分数矛盾.

(2) 提示：利用 (1) 的结论.

第 2 节

1．(5) 提示：$\dfrac{n^2}{3^n}<\dfrac{n^2}{(1+2)^n}<\dfrac{n^2}{2^3C_n^3}$；

(6) 提示：当$n>5$，有 $\dfrac{3^n}{n!}\le\dfrac{3^5}{5!}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-5}$；

(7) 提示：记$\dfrac{n}{2}$的整数部分为m，则有$\dfrac{n!}{n^n}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^m$；

(8) 提示：证明不等式$0<\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}<\dfrac{1}{n}$.

6．提示：证明并利用不等式$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|\le\sqrt{|x-a|}$.

8．(1) 1；(2) 1；(3) 2；(4) 0，提示：应用不等式$2k>\sqrt{(2k-1)(2k+1)}$.

9．(1) 3；(2) $\dfrac{1}{2}$；(3) $\dfrac{1}{3}$；(4) 0；(5) $\dfrac{1}{2}$；(6) $-\dfrac{1}{2}$；(7) 0；(8) $\dfrac{1}{2}$；(9) 1；

(10) 3，提示：设 $x_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$，则 $2x_n=1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$，两式相减，得到 $x_n=1+2(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}})-\dfrac{2n-1}{2^n}$.

11．提示：$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}$.

12．(1) 提示：设$a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$，则$\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=nS_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k$，再利用例 2.2.6 的结论；

(2) 提示：利用定理 1.2.2 与 (1) .

13．提示：令$a_n=a+\alpha_n, b_n=b+\beta_n$.

14．提示：注意有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n}=a$.

第 3 节

2．(1) 提示：设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，则 $\forall G>0,\exists N_1>0,\forall n>N_1:a_n>3G$。对固定的 N_1，$\exists N>2N_1,\forall n>N:\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|<\dfrac{G}{2}$，于是

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\frac{a_{N_1+1}+a_{N_1+2}+\cdots+a_n}{n}-\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|>\frac{3G}{2}-\frac{G}{2}=G\ 。$$

7．提示：记 $k=\lambda^{-1}$，则 $a_n+\lambda a_{n-1}+\cdots+\lambda^n a_0=\dfrac{k^n a_n+k^{n-1}a_{n-1}+\cdots+a_0}{k^n}$，再利用 Stolz 定理.

8．提示：作代换 $a_k=A_k-A_{k-1}$，得到

$$\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=A_n-\frac{A_1(p_2-p_1)+A_2(p_3-p_2)+\cdots+A_{n-1}(p_n-p_{n-1})}{p_n},$$

再对后一分式应用 Stolz 定理.

第 4 节

1．(1) $\dfrac{1}{e}$；(2) e；(3) $\sqrt{e}$；(4) 1；(5) e；提示：当 $n\ge2$ 时，有

$$\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

2．(1) 依次证明 $x_n<2$，$\{x_n\}$单调增加，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$；

(2) 依次证明 $x_n<2$，$\{x_n\}$单调增加，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$；

(3) 依次证明 $x_n>-1$，$\{x_n\}$单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$；

(4) 依次证明 $x_n<4$，$\{x_n\}$单调增加，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=4$；

(5) 依次证明 $0<x_n<1$，$\{x_n\}$单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$；

(6) 依次证明 $0<x_n<1$，$\{x_n\}$单调增加，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

4．$\sqrt{2},-\sqrt{2}$；提示：对 $x_1=1$，依次证明对任意 n 有 $x_n>0$，当 $n\ge2$ 时 $x_n\ge\sqrt{2}$ 及

$x_{n+1}-x_n=-\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}\le 0$，即$\{x_n\}$单调减少有下界；对$x_1=-2$，依次证明对任意$n$有

$x_n\le -\sqrt{2}$及$x_{n+1}-x_n=-\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}\ge 0$，即$\{x_n\}$单调增加有上界.

5．$\frac{a+2b}{3}$；提示：先求数列$\{x_{n+1}-x_n\}$的通项公式$x_{n+1}-x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a)$，再利用

$x_n=x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})$.

6．(1) 提示：$a\le x_n<x_{n+1}<y_{n+1}<y_n\le b$；

(2) 提示：$n\ge 2$时，$\frac{2ab}{a+b}\le y_n<y_{n+1}<x_{n+1}<x_n\le\frac{a+b}{2}$.

7．$\sqrt{2}-1$；提示：数列$\{x_{2k}\}$单调增加，数列$\{x_{2k+1}\}$单调减少.

13．(2) 提示：证明不等式$\left|\sum_{k=n+1}^{m}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right|<\frac{1}{n+1}$.

14．(1) 反例：$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$；

(2) 提示：$\forall m>n$，利用不等式$|x_m-x_n|\le|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$.

15．提示：利用 Cauchy 收敛原理.

16．提示：采用反证法。不妨设$\{x_n\}$是单调增加的有界数列。假设它不收敛，则

$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N>0$，$\exists m,n>N$：$|x_m-x_n|>\varepsilon_0$.

取$N_1=1,\exists m_1>n_1>N_1: x_{m_1}-x_{n_1}>\varepsilon_0$;

取$N_2=m_1,\exists m_2>n_2>N_2: x_{m_2}-x_{n_2}>\varepsilon_0$;

……

取$N_k=m_{k-1},\exists m_k>n_k>N_k: x_{m_k}-x_{n_k}>\varepsilon_0$;

…….

于是$x_{m_k}-x_{n_1}>k\varepsilon_0\to+\infty\ (k\to\infty)$，与数列$\{x_n\}$有界矛盾.