第三章

第 1 节

2．(1) $\frac{2}{3}$；(2) $\frac{1}{2}$；(3) $\frac{2}{3}$；(4) 5；(5) n；(6) $\frac{1}{2}nm(n-m)$；(7) $\cos a$；(8) 2；

(9) 4；(10) $\frac{1}{2}$.

3．(1) 提示：当$\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}$，则$\frac{n}{n+1}<x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1$；

当$-\frac{1}{n}<x\le-\frac{1}{n+1}$，则$1\le x\left[\frac{1}{x}\right]<\frac{n+1}{n}$.

(2) 提示：当$n\le x<n+1$，则$n^{\frac{1}{n+1}}<x^{\frac{1}{x}}<(n+1)^{\frac{1}{n}}$.

4．(1) 提示：$0<\frac{x^k}{a^x}<\frac{([x]+1)^k}{a^{[x]}}$，利用$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{a^n}=0$；

(2) 提示：令$\ln x=t$，再利用（1）的结论.

5．(1) $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=4$，$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=4$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=1$；

(3) $D(x)$在任意点无单侧极限；

(4) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{n}-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to \frac{1}{n}+}f(x)=1$.

6．(1) 0；(2) 不存在；(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}=\begin{cases}0 & \alpha<1\\ 1 & \alpha=1\\ +\infty & \alpha>1\end{cases}$；

(4) 不存在；(5) 1；(6) 不存在.

7．存在；提示：$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=1$.

10．(1) $\exists\varepsilon_0>0,\forall N,\exists n>N:|x_n|\ge\varepsilon_0$；

(2) $\exists G_0>0,\forall N,\exists n>N:x_n\le G_0$；

(3) $\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x\in(x_0,x_0+\delta):|f(x)-A|\ge\varepsilon_0$；

(4) $\exists G_0>0,\forall\delta>0,\exists x\in(x_0-\delta,x_0):f(x)\le G_0$；

（5）$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall X > 0, \exists x \in (-\infty, -X): |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$；

（6）$\exists G_0 > 0, \forall X > 0, \exists x \in (X, +\infty): f(x) \geq -G_0$.

15．提示：$\forall x_0 \in (0, +\infty)$， 利用 $f(x_0) = f(2^n x_0)$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} f(2^n x_0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

第 2 节

2．（1）$\bigcup\limits_{k\in Z}\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$；（2）$\bigcup\limits_{k\in Z}\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$；（3）$(-1,1]\cup[3,+\infty)$；

（4）$\{x \mid x > -1, x \notin \mathrm{N}^+\}$；（5）$\{(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\}\setminus\left\{\frac{1}{k} \mid k \in Z, k \neq 0\right\}$；

（6）$\bigcup\limits_{k\in Z}(k\pi, (k+1)\pi)$.

5．提示：$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}\{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\}$；

$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}\{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\}$.

7．（1）1，（2）e^2，（3）$e^{\cot a}$，（4）e^{x+1}，（5）e^2.

8．（1）$x = 1, -2$，第二类不连续点；

（2）$x = k\ (k \in Z, k \neq 0)$，第一类不连续点；$x = 0$，第二类不连续点；

（3）$x = k\pi\ (k \in Z, k \neq 0)$，第二类不连续点；$x = 0$，第三类不连续点；

（4）$x = \frac{1}{2}k\ (k \in Z)$，第一类不连续点；

（5）$x = 0$，第三类不连续点；

（6）$x = 0$，第三类不连续点；

（7）$x = 0$，第一类不连续点；$x = 1$，第三类不连续点；$x = -1$，第二类不连续点；

（8）$x = 0$，第三类不连续点；

（9）非整数点，第二类不连续点；

（10）非整数有理点，第三类不连续点.

9．提示：$\forall x \in (0, +\infty)$，利用 $f(x) = f(x^{\frac{1}{2^n}})$，$\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1$ 及 $f(x)$ 的连续性，得到

$f(x) \equiv f(1)$.

第 3 节

1．（1）$u(x) \sim 2x^3\ (x \to 0)$；$u(x) \sim x^5\ (x \to \infty)$；

（2） $u(x) \sim -2x^{-1}\ (x \to 0)$ ；$u(x) \sim \dfrac{1}{3}x\ (x \to \infty)$ ；

（3） $u(x) \sim x^{\frac{2}{3}}\ (x \to 0+)$ ；$u(x) \sim x^{\frac{3}{2}}\ (x \to +\infty)$ ；

（4） $u(x) \sim x^{\frac{1}{8}}\ (x \to 0+)$ ；$u(x) \sim x^{\frac{1}{2}}\ (x \to +\infty)$ ；

（5） $u(x) \sim \dfrac{5}{6}x\ (x \to 0)$ ；$u(x) \sim \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}\ (x \to +\infty)$ ；

（6） $u(x) \sim \dfrac{1}{2}x^{-1}\ (x \to +\infty)$ ；

（7） $u(x) \sim x^{\frac{1}{2}}\ (x \to 0+)$ ；

（8） $u(x) \sim -2x\ (x \to 0+)$ ；

（9） $u(x) \sim -\dfrac{3}{2}x^2\ (x \to 0)$ ；

（10） $u(x) \sim x\ (x \to 0)$.

2．（1） $\ln^k x\ \ (k>0)$， $x^\alpha\ \ (\alpha>0)$， $a^x\ \ (a>1)$， $[x]!$， x^x ；

(2) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{x}}$， $\dfrac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]!}$， $a^{-\frac{1}{x}}\ \ (a>1)$， $x^\alpha\ \ (\alpha>0)$， $\ln^{-k}\left(\dfrac{1}{x}\right)\ \ (k>0)$.

3．（1） $\dfrac{1}{6}$，（2） 0，（3） $\dfrac{1}{2}$，（4） 1，（5） $a^\alpha \ln a$，（6） $\alpha a^{\alpha-1}$，

（7） 1，（8） $\dfrac{1}{a}$，（9） e^2，（10） e^{-1}，（11） $\ln x$，（12） $\ln x$.

第 4 节

8．提示：

（1） 在 $(0,1)$ 上，令 $x_n' = \dfrac{1}{n\pi}$， $x_n'' = \dfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$， $x_n' - x_n'' \to 0$，但 $\left|\sin\dfrac{1}{x_n'} - \sin\dfrac{1}{x_n''}\right| = 1$ ；

在 $(a,1)$ 上，利用不等式 $\left|\sin\dfrac{1}{x_1} - \sin\dfrac{1}{x_2}\right| \le \left|\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right| \le \dfrac{|x_1 - x_2|}{a^2}$.

（2） 在 $-\infty,+\infty)$ 上，令 $x_n' = \sqrt{n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$， $x_n'' = \sqrt{n\pi}$， $x_n' - x_n'' \to 0$，但

$\left|\sin(x_n')^2 - \sin(x_n'')^2\right| = 1$ ；

在$[0,A]$上，利用不等式$\left|\sin x_1^2-\sin x_2^2\right|\le\left|x_1^2-x_2^2\right|\le 2A\left|x_1-x_2\right|$.

（3） 利用不等式$\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|\le\sqrt{\left|x_1-x_2\right|}$.

（4） 利用不等式$\left|\ln x_1-\ln x_2\right|=\left|\ln\left(1+\dfrac{x_1-x_2}{x_2}\right)\right|\le\left|x_1-x_2\right|$.

（5） 利用不等式$\left|\cos\sqrt{x_1}-\cos\sqrt{x_2}\right|\le\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|\le\sqrt{\left|x_1-x_2\right|}$.

9．提示：过P点作弦，设弦与x轴的夹角为θ，P点将弦分成长度为$l_1(\theta)$和$l_2(\theta)$的两线段。则$f(\theta)=l_1(\theta)-l_2(\theta)$在$[0,\pi]$连续，满足$f(0)=-f(\pi)$，于是在$[0,\pi]$必有一个零点.

10．提示：令$F(x)=f(x+1)-f(x)$，则$F(1)=-F(0)$，于是$F(x)$在$[0,1]$必有一个零点.

14．提示：$\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}\le\dfrac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right]\le\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$.

15．提示：由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\forall\varepsilon>0,\exists X>a,\forall x',x''>X:\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。由于$f(x)$在$[a,X+1]$连续，所以一致连续，也就是$\exists 0<\delta<1,\forall x',x''\in[a,X+1](\left|x'-x''\right|<\delta)$:

$\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。于是 $\forall x',x''\in[a,+\infty)(\left|x'-x''\right|<\delta):\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$