习 题 12.1

1． 求下列函数的偏导数：

（1） $z = x^5 - 6x^4y^2 + y^6$ ；（2） $z = x^2\ln(x^2+y^2)$ ；

（3） $z = xy + \dfrac{x}{y}$ ；（4） $z = \sin(xy) + \cos^2(xy)$ ；

（5） $z = \mathrm{e}^x(\cos y + x\sin y)$ ；（6） $z = \tan\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$ ；

（7） $z = \sin\dfrac{x}{y}\cdot\cos\dfrac{y}{x}$ ；（8） $z = (1+xy)^y$ ；

（9） $z = \ln(x + \ln y)$ ；（10） $z = \arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$ ；

（11） $u = \mathrm{e}^{x(x^2+y^2+z^2)}$ ；（12） $u = x^{\frac{y}{z}}$

(13) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ；（14） $u = x^{y^z}$ ；

（15） $u = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ （a_i 为常数）；（16） $u = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$， $a_{ij} = a_{ji}$ 且为常数。

2． 设 $f(x,y) = x + y - \sqrt{x^2+y^2}$，求 $f_x(3,4)$ 及 $f_y(3,4)$。

3． 设 $z = \mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}}$，验证 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$。

4． 曲线 $\begin{cases} z = \dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$，在点 $(2,4,5)$ 处的切线与 x 轴的正向所夹的角度是多少？

5． 求下列函数在指定点的全微分：

（1） $f(x,y) = 3x^2y - xy^2$，在点 $(1,2)$ ；

（2） $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$，在点 $(2,4)$ ；

（3） $f(x,y) = \dfrac{\sin x}{y^2}$，在点 $(0,1)$ 和 $\left(\dfrac{\pi}{4},2\right)$。

6． 求下列函数的全微分：

（1） $z = y^x$ ；（2） $z = xy\,\mathrm{e}^{xy}$ ；

（3） $z = \dfrac{x+y}{x-y}$ ；（4） $z = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ；

（5） $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ；（6） $u = \ln(x^2+y^2+z^2)$。

7． 求函数 $z = x\,\mathrm{e}^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处的沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 方向的方向导数。

8． 设 $z = x^2 - xy + y^2$，求它在点 $(1,1)$ 处的沿方向 $\boldsymbol{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ 的方向导数，并指出：

（1）沿哪个方向的方向导数最大？

（2）沿哪个方向的方向导数最小？

（3）沿哪个方向的方向导数为零？

9．如果可微函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处的从点 $(1,2)$ 到点 $(2,2)$ 方向的方向导数为 2，从点 $(1,2)$ 到点 $(1,1)$ 方向的方向导数为-2。求

（1）这个函数在点$(1,2)$处的梯度；

（2）点$(1,2)$处的从点$(1,2)$到点$(4,6)$方向的方向导数。

10. 求下列函数的梯度：

（1）$z = x^2 + y^2\sin(xy)$；　　（2）$z = 1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$；

（3）$u = x^2+2y^2+3z^2+3xy+4yz+6x-2y-5z$，在点$(1,1,1)$。

11. 对于函数$f(x,y)=xy$，在第 I 象限（包括边界）的每一点，指出函数值增加最快的方向。

12. 验证函数

$$f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$$

在原点$(0,0)$连续且可偏导，但除方向$\boldsymbol{e}_i$和$-\boldsymbol{e}_i$（$i=1,2$）外，在原点的沿其它方向的方向导数都不存在。

13. 验证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点$(0,0)$连续且可偏导，但它在该点不可微。

14. 验证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的偏导函数$f_x(x,y), f_y(x,y)$在原点$(0,0)$不连续，但它在该点可微。

15. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点$(0,0)$处沿各个方向的方向导数都存在，但它在该点不连续，因而不可微。

16．计算下列函数的高阶导数：

（1）$z=\arctan\dfrac{y}{x}$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

（2）$z=x\sin(x+y)+y\cos(x+y)$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

（3）$z=x\mathrm{e}^{xy}$，求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$；

（4）$u=\ln(ax+by+cz)$，求$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4},\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}$；

（5）$z=(x-a)^p(y-b)^q$，求$\dfrac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p\partial y^q}$；

（6）$u=xyz\,\mathrm{e}^{x+y+z}$，求$\dfrac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$。

17．计算下列函数的高阶微分：

（1） $z = x\ln(xy)$，求 $\mathrm{d}^2 z$ ；

（2） $z = \sin^2(ax+by)$，求 $\mathrm{d}^3 z$ ；

（3） $u = \mathrm{e}^{x+y+z}(x^2+y^2+z^2)$，求 $\mathrm{d}^3 u$ ；;

（4） $z = \mathrm{e}^x \sin y$，求 $\mathrm{d}^k z$。

18．函数 $z = f(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin y + \frac{1}{1-xy}，及\ f(0,y) = 2\sin y + y^3。$$

求 $f(x,y)$ 的表达式。

19．验证：

（1） $z = \mathrm{e}^{-kn^2x}\sin(ny)$ 满足热传导方程 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = k\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ；

（2） $u = z\arctan\dfrac{x}{y}$ 满足 Laplace 方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ ；

20．设 $f(r,t) = t^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4t}}$，确定 α 使得 f 满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)。$$

21．求下列向量值函数在指定点的导数：

（1） $\boldsymbol{f}(x) = (a\cos x, b\sin x, cx)^{\mathrm{T}}$，在 $x = \dfrac{\pi}{4}$ 点；

（2） $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (3x + e^y\cot z, x^3 + y^2\tan z)^{\mathrm{T}}$，在 $\left(1, 2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ 点；

（3） $\boldsymbol{g}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)^{\mathrm{T}}$，在 $(1,\pi)$ 点。

22．设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ 为向量值函数。

（1）如果坐标分量函数 $f_1(x,y,z) = x,\ f_2(x,y,z) = y,\ f_3(x,y,z) = z$，证明 $\boldsymbol{f}$ 的导数是单位阵；

（2） 写出坐标分量函数的一般形式，使 $\boldsymbol{f}$ 的导数是单位阵；

（3） 如果已知 $\boldsymbol{f}$ 的导数是对角阵 $\mathrm{diag}(p(x), q(y), r(z))$，那么坐标分量函数应该具有什么样的形式？

习　　题　12.2

1．利用链式规则求偏导数：

（1） $z = \tan(3t + 2x^2 - y^2),\quad x = \dfrac{1}{t},\quad y = \sqrt{t}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ ；

（2） $z = e^{x-2y},\quad x = \sin t,\quad y = t^3$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$ ；

（3） $w = \dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$， $y = a\sin x$， $z = \cos x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$ ；

（4） $z = u^2\ln v,\quad u = \dfrac{x}{y},\quad v = 3x - 2y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ ；

（5） $u = e^{x^2+y^2+z^2}$， $z = y^2 \sin x$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ ；

（6） $w = (x+y+z)\sin(x^2+y^2+z^2)$， $x = te^s$， $y = e^t$， $z = e^{s+t}$，求 $\dfrac{\partial w}{\partial s}, \dfrac{\partial w}{\partial t}$ ；

（7） $z = x^2 + y^2 + \cos(x+y)$， $x = u+v$， $y = \arcsin v$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$ ；

以下假设 f 具有二阶连续偏导数。

（8） $u = f\left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ；

（9） $u = f(x^2+y^2+z^2)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ；

（10） $w = f(x,y,z)$， $x = u+v$， $y = u-v$， $z = uv$，求 $\dfrac{\partial w}{\partial u}, \dfrac{\partial w}{\partial v}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}$。

2．设 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $f(x,x^2) = 1$， $f_x(x,x^2) = x$，求 $f_y(x,x^2)$。

3．设 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $f(1,1) = 1$， $f_x(1,1) = 2$， $f_y(1,1) = 3$。如果 $\varphi(x) = f(x, f(x,x))$，求 $\varphi'(1)$。

4．设 $z = \dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(t) \neq 0$，求 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

5．设 $z = \arctan\dfrac{x}{y}$， $x = u+v$， $y = u-v$，验证

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}。$$

6．设 φ 和 ψ 具有二阶连续导数，验证

（1） $u = y\varphi(x^2-y^2)$ 满足 $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x}{y}u$ ；

（2） $u = \varphi(x-at) + \psi(x+at)$ 满足波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

7．设 $z = f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，写出 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 在坐标变换

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy \end{cases}$$

下的表达式。

8．设 $f(x,y) = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$，求 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$。

9．如果函数 $f(x,y)$ 满足：对于任意的实数 t 及 x, y，成立

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y),$$

那么 f 称为 n 次齐次函数。

（1） 证明 n 次齐次函数 f 满足方程

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf \;;$$

（2） 利用上述性质，对于 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 求出 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

10. 设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{x}{y}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

11．设向量值函数 $\boldsymbol{f}$ ：$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ 的坐标分量函数为

$$\begin{cases} x=u^2+v^2, \\ y=u^2-v^2, \\ z=uv. \end{cases}$$

向量值函数 $\boldsymbol{g}$ ：$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 的坐标分量函数为

$$\begin{cases} u=r\cos\theta, \\ v=r\sin\theta. \end{cases}$$

求复合函数 $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ 的导数。

12．设 $w=f(x,u,v)$，$u=g(y,z)$，$v=h(x,y)$，求 $\dfrac{\partial w}{\partial x},\dfrac{\partial w}{\partial y},\dfrac{\partial w}{\partial z}$。

13．设 $z=u^v$，$u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，$v=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 dz。

14．设 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$，求 dz 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

15．求下列函数的全微分：

（1） $u=f(ax^2+by^2+cz^2)$；

（2） $u=f(x+y,xy)$；

（3） $u=f\left(\ln(1+x^2+y^2+z^2),e^{x+y+z}\right)$。

16．设 $f(t)$ 具有任意阶连续导数，而 $u=f(ax+by+cz)$。对任意正整数 k，求 $\mathrm{d}^k u$。

17. 设函数 $z=f(x,y)$ 在全平面上有定义，具有连续的偏导数，且满足方程

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=0,$$

证明：$f(x,y)$ 为常数。

18．设 n 元函数 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上具有连续偏导数，证明对于任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，成立下述 **Hadamard** 公式：

$$f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1(y_i-x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}+t(\mathbf{y}-\mathbf{x}))dt。$$

习 题 12.3

1．对函数 $f(x,y)=\sin x\cos y$ 应用中值定理证明：存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$\frac{3}{4}=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi\theta}{3}\cos\frac{\pi\theta}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi\theta}{3}\sin\frac{\pi\theta}{6}。$$

2．写出函数 $f(x,y)=3x^3+y^3-2x^2y-2xy^2-6x-8y+9$ 在点 $(1,2)$ 的 Taylor 展开式。

3．求函数 $f(x,y)=\sin x\ln(1+y)$ 在 $(0,0)$ 点的 Taylor 展开式（展开到三阶导数为止）。

4．求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$ 在 $(0,0)$ 点的 n 阶 Taylor 展开式，并写出余项。

5．设 $f(x,y)=\dfrac{\cos y}{x},\quad x>0$.

（1） 求 $f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 点的 Taylor 展开式（展开到二阶导数），并计算余项 R_2。

（2） 求 $f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 点的 k 阶 Taylor 展开式，并证明在 $(1,0)$ 点的某个领域内，余项 R_k 满足当 $k\to\infty$ 时，$R_k\to 0$。

6．利用 Taylor 公式近似计算 $8.96^{2.03}$（展开到二阶导数）。

7．设 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上可微。$\boldsymbol{l}_1$ 与 $\boldsymbol{l}_2$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上两个线性无关的单位向量（方向）。若

$$\frac{\partial f}{\partial l_i}(x,y)\equiv 0,\quad i=1,2,$$

证明：在 $\mathbf{R}^2$ 上 $f(x,y)\equiv$ 常数。

8．设 $f(x,y)=\sin\dfrac{y}{x}$（$x\neq 0$），证明：

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x,y)\equiv 0,\quad k\geq 1。$$

习　题　12.4

1．求下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数：

（1） $\sin y+e^x-xy^2=0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$；

（2） $x^y=y^x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$；

（3） $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$；

（4） $\arctan\dfrac{x+y}{a}-\dfrac{y}{a}=0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}$；

（5） $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{x}{y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

（6） $e^z-xyz=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

（7） $z^3-3xyz=a^3$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

（8） $f(x+y,y+z,z+x)=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

（9） $z=f(xz,z-y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$；

（10） $f(x,x+y,x+y+z)=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2．设 $y=\tan(x+y)$ 确定 y 为 x 的隐函数，验证

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}\,x^3}=-\frac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}。$$

3．设 ϕ 是可微函数，证明由 $\phi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 满足方程

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c。$$

4．设方程$\phi(x+zy^{-1}, y+zx^{-1})=0$确定隐函数$z=f(x,y)$，证明它满足方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy。$$

5．求下列方程组所确定的隐函数的导数或偏导数：

(1) $\begin{cases} z-x^2-y^2=0, \\ x^2+2y^2+3z^2=4a^2, \end{cases}$ 求$\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$，$\dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}$和$\dfrac{\mathrm{d}^2\,z}{\mathrm{d}\,x^2}$；

(2) $\begin{cases} xu+yv=0, \\ yu+xv=1, \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$和$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$；

(3) $\begin{cases} u=f(ux, v+y), \\ v=g(u-x, v^2y), \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$和$\dfrac{\partial v}{\partial x}$；

(4) $\begin{cases} x=u+v, \\ y=u-v, \\ z=u^2v^2, \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

(5) $\begin{cases} x=e^u\cos v, \\ y=e^u\sin v, \\ z=u^2+v^2, \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

6．求微分

(1) $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求$\mathrm{d}\,z$；

(2) $\begin{cases} x+y=u+v, \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{\sin u}{\sin v}, \end{cases}$ 求$\mathrm{d}u$与$\mathrm{d}v$。

7． 设$\begin{cases} x=x(y), \\ z=z(y) \end{cases}$是由方程组$\begin{cases} F(y-x, y-z)=0, \\ G\left(xy, \dfrac{z}{y}\right)=0 \end{cases}$所确定的向量值隐函数，其中二元函数

F和G分别具有连续的偏导数，求$\dfrac{dx}{dy}$和$\dfrac{dz}{dy}$。

8． 设$f(x,y)$具有二阶连续偏导数。在极坐标$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta \end{cases}$变换下，求

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

关于极坐标的表达式。

9． 设二元函数f具有二阶连续偏导数。证明：通过适当线性变换

$$\begin{cases} u=x+\lambda y, \\ v=x+\mu y, \end{cases}$$

可以将方程

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \qquad (AC-B^2<0).$$

化简为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=0。$$

并说明此时λ,μ为一元二次方程$A+2Bt+Ct^2=0$的两个相异实根。

10. 通过自变量变换$\begin{cases} x=\mathrm{e}^{\xi}, \\ y=\mathrm{e}^{\eta} \end{cases}$变换方程

$$ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \quad a,b,c \text{ 为常数。}$$

11．通过自变量变换$\begin{cases} u=x-2\sqrt{y}, \\ v=x+2\sqrt{y} \end{cases}$ 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}, \quad y>0\text{。}$$

12．导出新的因变量关于新的自变量的偏导数所满足的方程：

（1）用$\begin{cases} u=x^2+y^2, \\ v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \end{cases}$ 及$w=\ln z-(x+y)$变换方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z\text{；}$$

（2）用$\begin{cases} u=x, \\ v=x+y \end{cases}$及$w=x+y+z$变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\text{；}$$

（3）用$\begin{cases} u=x+y, \\ v=\dfrac{y}{x} \end{cases}$ 及$w=\dfrac{z}{x}$变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\text{。}$$

13．设$y=f(x,t)$，而t是由方程$F(x,y,t)=0$所确定的x,y的隐函数，其中f和F都具有连续偏导数。证明

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}\text{。}$$

14. 设二元函数$f(x,y):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$具有连续偏导数，证明：存在一对一的连续的向量值函数$\mathbf{G}(t):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$，使得

$$f\circ\mathbf{G}\equiv\text{常数。}$$

习　　题　12.5

1．求下列曲线在指定点处的切线与法平面方程：

（1）$\begin{cases} y=x^2, \\ z=\dfrac{x}{1+x}. \end{cases}$ 在$\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$点；

（2） $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ z = 4\sin\dfrac{t}{2}. \end{cases}$ 在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 对应的点；

（3） $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6. \end{cases}$ 在 $(1,-2,1)$ 点；

（4） $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ x^2 + z^2 = R^2. \end{cases}$ 在 $\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}, \dfrac{R}{\sqrt{2}}, \dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)$ 点。

2．在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上求一点，使曲线在这一点的切线与平面 $x + 2y + z = 10$ 平行。

3．求曲线 $x = \sin^2 t,\ y = \sin t\cos t,\ z = \cos^2 t$ 在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 所对应的点处的切线的方向余弦。

4．求下列曲面在指定点的切平面与法线方程：

（1） $z = 2x^4 + 3y^3$，在点 $(2,1,35)$；

（2） $\mathrm{e}^{\frac{x}{z}} + \mathrm{e}^{\frac{y}{z}} = 4$，在点 $(\ln 2, \ln 2, 1)$；

（3） $x = u + v,\ y = u^2 + v^2,\ z = u^3 + v^3$，在点 $u = 0,\ v = 1$ 所对应的点。

5．在马鞍面 $z = xy$ 上求一点，使得这一点的法线与平面 $x + 3y + z + 9 = 0$ 垂直，并写出此法线的方程。

6．求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 498$ 的平行于平面 $x + 3y + 5z = 7$ 的切平面。

7．求圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与马鞍面 $bz = xy$ 的交角。

8．已知曲面 $x^2 - y^2 - 3z = 0$，求经过点 $A(0,0,-1)$ 且与直线 $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$ 平行的切平面的方程。

9．设椭球面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 上点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量为 $\boldsymbol{n}$，求函数 $u = \dfrac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数。

10．证明曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}\ \ (a > 0)$ 上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a。

11．证明：曲线

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{e}^t \cos t, \\ y = a\,\mathrm{e}^t \sin t, \\ z = a\,\mathrm{e}^t \end{cases}$$

与锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的各母线相交的角度相同。

12．证明曲面 $f(ax - bz, ay - cz) = 0$ 上的切平面都与某一定直线平行，其中函数 f 连续可微，且常数 a, b, c 不同时为零。

13．证明曲面 $z = xf\left(\dfrac{y}{x}\right)\ \ (x \neq 0)$ 在任一点处的切平面都通过原点，其中函数 f 连续可微。

14．证明曲面 $F\left(\dfrac{z}{y}, \dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{x}\right) = 0$ 的所有切平面都过某一定点，其中函数 F 具有连续偏导数。

15．设 $F(x, y, z)$ 具有连续偏导数，且 ${F_x}^2 + {F_y}^2 + {F_z}^2 \neq 0$。进一步，设 k 为正整数，

$F(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数，即对于任意的实数 t 和 (x,y,z)，成立

$$F(tx,ty,tz)=t^kF(x,y,z)。$$

证明：曲面 $F(x,y,z)=0$ 上所有点的切平面相交于一定点。

（提示：利用恒等式 $xF_x(x,y,z)+yF_y(x,y,z)+zF_z(x,y,z)=kF(x,y,z)$）

习　　题　12.6

1．讨论下列函数的极值：

（1） $f(x,y)=x^4+2y^4-2x^2-12y^2+6$；

（2） $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$；

（3） $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$；

（4） $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^4)$；

（5） $f(x,y)=xy+\dfrac{a^3}{x}+\dfrac{b^3}{y}$，其中常数 $a>0,\quad b>0$；

（6） $f(x,y,z)=x+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{2}{z}$ （$x,y,z>0$）。

2．设 $f(x,y,z)=x^2+3y^2+2z^2-2xy+2xz$，证明函数 f 的最小值为 0。

3．证明函数 $f(x,y)=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$ 有无穷多个极大值点，但无极小值点。

4．求函数 $f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$ 在闭区域

$$\mathbf{D}=\{(x,y)\,|\,x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 2\pi\}$$

上的最大值与最小值。

5．在 $[0,1]$ 上用怎样的直线 $\xi=ax+b$ 来代替曲线 $y=x^2$，才能使它在平方误差的积分

$$J(a,b)=\int_0^1(y-\xi)^2dx$$

为极小意义下的最佳近似。

6．在半径为 R 的圆上，求内接三角形的面积最大者。

7．要做一圆柱形帐幕，并给它加一个圆锥形的顶。问：在体积为定值时，圆柱的半径 R，高 H，及圆锥的高 h 满足什么关系时，所用的布料最省？

8．求由方程 $x^2+2xy+2y^2=1$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的极值。

9．求由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值。

10．在 Oxy 平面上求一点，使它到三直线 $x=0$，$y=0$，和 $x+2y-16=0$ 的距离的平方和最小。

11．证明：圆的所有外切三角形中，以正三角形的面积为最小。

12．证明：圆的所有内接 n 边形中，以正 n 边形的面积为最大。

13．证明：当 $0<x<1,\ 0<y<+\infty$ 时，成立不等式

$$yx^y(1-x)<\mathrm{e}^{-1}。$$

14．某养殖场饲养两种鱼，若甲种鱼放养 x（万尾），乙种鱼放养 y（万尾），收获时两种鱼的收获量分别为

$$(3-\alpha x-\beta y)x\quad 和\quad (4-\beta x-2\alpha y)y\qquad（\alpha>\beta>0）。$$

求使产鱼总量最大的放养数。

计 算 实 习 题

（在教师的指导下，编制程序在电子计算机上实际计算）

1．某种机器零件的加工需经两道工序，x 表示零件在第一道工序中出现的疵点数（疵点指气泡、砂眼、裂痕等），y 表示在第二道工序中出现的疵点数。某日测得 8 个零件的 x 与 y 如下：

x	0	1	3	6	8	5	4	2
y	1	2	2	4	4	3	3	2

画出这些数据的散点图，找出它们之间关系的经验公式 $y = ax + b$，并画出拟合曲线。

2．某品种大豆的脂肪含量 $x(\%)$ 与蛋白质含量 $y(\%)$ 的测定结果如下表所示：

x	16.5	17.5	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5	24.5
y	43.5	42.6	41.8	40.6	40.3	38.7	37.2	36.0	34.0

画出这些数据的散点图，找出它们之间关系的经验公式，并画出拟合曲线。

3．某种产品加工前的含水率（%）与加工后含水率（%）的测试结果如下表：

测试编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
加工前的含水率 x_i	16.7	18.2	18.0	17.9	17.4	16.6	17.2	17.7	15.7	17.1
加工后的含水率 y_i	17.5	18.7	18.6	18.5	18.2	17.5	18.0	18.2	16.9	17.8

试确定加工后的含水率 y 与加工前含水率 x 的关系。

4．盛钢水的钢包，在使用过程中由于钢水对耐火材料的浸蚀，容积会不断增大。在生产过程中，积累了使用次数与钢包容积增大之间的以下 16 组数据。画出这些数据的散点图，找出使用次数 x 与钢包容积增大 y 之间的关系，并画出拟合曲线。

x	2	3	4	5	6	7	8	9
y	6.42	8.20	9.58	9.50	9.70	10.00	9.93	9.99
x	10	11	12	13	14	15	16	17
y	10.50	10.59	10.60	10.63	10.60	10.90	10.76	10.80

（提示：假设 $y = ax^2 + bx + c$。）

5．在研究化学反应速度时，得到下列数据。找出实验开始后的时间 t 与反应物的量 m 之间的关系，并画出拟合曲线。

t	3	6	9	12	15	18	21	24
m	57.6	41.5	31.2	22.9	15.4	12.1	8.9	6.4

（提示：m 与 t 的关系为 $m = a\mathrm{e}^{bt}$。）

习　　题　12.7

1．求下列函数的条件极值：

（1）$f(x,y) = xy$，约束条件为 $x + y = 1$；

（2）$f(x,y,z) = x - 2y + 2z$，约束条件为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$；

（3）$f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$，约束条件为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ Ax + By + Cz = 0, \end{cases}$ 其中 $a > b > c > 0$，$A^2 + B^2 + C^2 = 1$。

2．在周长为 $2p$ 的一切三角形中，找出面积最大的三角形。

3．要做一个容积为 1 立方米的有盖铝圆桶，什么样的尺寸才能使用料最省？

4．抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截成一椭圆，求原点到这个椭圆的最长距离与最短距离。

5．求椭圆 $x^2 + 3y^2 = 12$ 的内接等腰三角形，其底边平行于椭圆的长轴，而使面积最大。

6．求空间一点 (a,b,c) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离。

7．求平面 $Ax+By+Cz=0$ 与柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 相交所成的椭圆的面积（A,B,C 都不为零；a,b 为正数)。

8．求 $z=\frac{1}{2}(x^4+y^4)$ 在条件 $x+y=a$ 下的最小值，其中 $x\ge 0$， $y\ge 0$，a 为常数。并证明不等式

$$\frac{x^4+y^4}{2}\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^4。$$

9．当 $x>0,\ y>0,\ z>0$ 时，求函数

$$f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$$

在球面 $x^2+y^2+z^2=6R^2$ 上的最大值。并由此证明：当 a,b,c 为正实数时，成立不等式

$$ab^2c^3\le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6。$$

10．(1) 求函数 $f(x,y,z)=x^a y^b z^c\ (x>0,y>0,z>0)$ 在约束条件 $x^k+y^k+z^k=1$ 下的极大值，其中 k,a,b,c 均为正常数；

(2) 利用 (1) 的结果证明：对于任何正数 u,v,w，成立不等式

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a\left(\frac{v}{b}\right)^b\left(\frac{w}{c}\right)^c\le\left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}。$$

11．求 a,b 之值，使得椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 包含圆 $(x-1)^2+y^2=1$，且面积最小。

12．设三角形 ABC 的三个顶点分别在三条光滑曲线 $f(x,y)=0$， $g(x,y)=0$ 及 $h(x,y)=0$ 上。证明：若三角形 ABC 的面积取极大值，则各曲线分别在三个顶点处的法线必通过三角形 ABC 的垂心。

13．设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个已知正数。求 n 元函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}a_k x_k$$

在约束条件

$$\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2\le 1$$

下的最大值与最小值。

14．求二次型 $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j\quad (a_{ij}=a_{ji})$ 在 n 维单位球面 $\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\ \middle|\ \sum_{k=1}^{n}{x_k}^2=1\right\}$ 上的最大值与最小值。

15．设生产某种产品必须投入两种要素，x_1 和 x_2 分别为两要素的投入量，Q 为产出量。若生产函数为 $Q=2{x_1}^{\alpha}{x_2}^{\beta}$，其中 α,β 为正的常数，且 $\alpha+\beta=1$。假定两种要素的价格分别为 p_1 和 p_2，试问：当产出量为 12 时，两种要素各投入多少可以使得投入总费用最小。