§ 2　多元连续函数

多元函数

定义 11.2.1 设 $\mathbf{D}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的点集，$\mathbf{D}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射

$$f:\mathbf{D}\to\mathbf{R},$$
$$\boldsymbol{x}\mapsto z$$

称为 n **元函数**，记为 $z=f(\boldsymbol{x})$。这时，$\mathbf{D}$ 称为 f 的**定义域**，$f(\mathbf{D})=\{z\in\mathbf{R}\mid z=f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{D}\}$ 称为 f 的**值域**，$\Gamma=\{(\boldsymbol{x},z)\in\mathbf{R}^{n+1}\mid z=f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{D}\}$ 称为 f 的**图象**。

例 11. 2. 1 $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ 是二元函数，其定义域为

$$\mathbf{D}=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\},$$

函数的图象是一个上半椭球面（见图 11.2.1）。

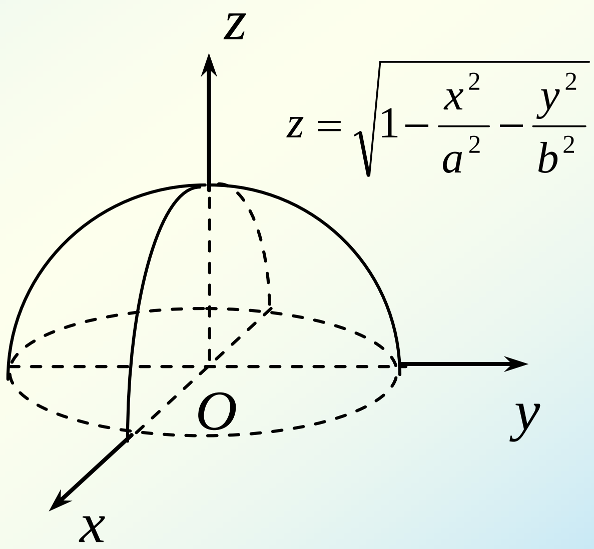

图 11.2.1

多元函数的极限

定义 11.2.2 设 $\mathbf{D}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的开集，$\boldsymbol{x}_0=\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)\in\mathbf{D}$ 为一定点，$z=f(\boldsymbol{x})$ 是定义在 $\mathbf{D}\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 上的 n 元函数，A 是一个实数。如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{x}_0,\delta)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 时，成立

$$\left|f(\boldsymbol{x})-A\right|<\varepsilon,$$

则称 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 时 f **收敛**，并称 A 为 f 当 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 时的（$\boldsymbol{n}$ **重**）**极限**，记为

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = A，\text{或}\quad f(\boldsymbol{x})\to A \quad（\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0），\text{或}$$

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0\\ \cdots\\ x_n\to x_n^0}} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=A。$$

多元函数的极限

定义 11.2.2 设 $\mathbf{D}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的开集，$\boldsymbol{x}_0=\left(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0\right)\in\mathbf{D}$ 为一定点，$z=f(\boldsymbol{x})$ 是定义在 $\mathbf{D}\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 上的 n 元函数，A 是一个实数。如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{x}_0,\delta)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 时，成立

$$\left|f(\boldsymbol{x})-A\right|<\varepsilon,$$

则称 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 时 f **收敛**，并称 A 为 f 当 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 时的（**n 重**）**极限**，记为

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = A，\text{或}\quad f(\boldsymbol{x})\to A\quad（\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0），\text{或}$$

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0\\ \cdots\\ x_n\to x_n^0}} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=A。$$

注 在上面的定义中，“$\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{x}_0,\delta)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$”也可以用下面的条件

$$|x_1-x_1^0|<\delta,\quad |x_2-x_2^0|<\delta,\quad \cdots,\quad |x_n-x_n^0|<\delta,\qquad \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}_0$$

替代。

例 11.2.2 设 $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{y}{x^2+y^2}$， 证明

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0\text{。}$$

证 由于

$$|f(x,y)-0|=\left|(x+y)\sin\frac{y}{x^2+y^2}\right|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|,$$

所以，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，那么当 $|x-0|<\delta,|y-0|<\delta$，且 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$|f(x,y)-0|\leqslant|x|+|y|<\delta+\delta=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\text{。}$$

这说明了 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$。

对一元函数而言，只要在 x_0 的左、右极限存在且相等，函数在 x_0 处的极限就存在。而对多元函数来说，根据极限存在的定义，则要求当 x 以任何方式趋于 x_0 时，函数值都趋于同一个极限。若自变量沿不同的两条曲线趋于某一定点时，函数的极限不同或不存在，那么这个函数在该点的极限一定不存在。

对一元函数而言，只要在 $\boldsymbol{x}_0$ 的左、右极限存在且相等，函数在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的极限就存在。而对多元函数来说，根据极限存在的定义，则要求当 $\boldsymbol{x}$ 以任何方式趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 时，函数值都趋于同一个极限。若自变量沿不同的两条曲线趋于某一定点时，函数的极限不同或不存在，那么这个函数在该点的极限一定不存在。

例 11.2.3 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，$(x,y)\neq(0,0)$。

当点 $\boldsymbol{x}=(x,y)$ 沿 x 轴和 y 轴趋于 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 的极限都是 0。但当点 $\boldsymbol{x}=(x,y)$ 沿直线 $y=mx$ 趋于 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2},$$

对于不同的 m 有不同的极限值。这说明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的极限不存在。

下例说明即使点 $\boldsymbol{x}$ 沿任意直线趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 时，$f(x,y)$ 的极限都存在且相等，仍无法保证函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处有极限。

例 11.2.4 设 $f(x,y)=\dfrac{(y^2-x)^2}{y^4+x^2}$，$(x,y)\neq(0,0)$。

当点 $\boldsymbol{x}=(x,y)$ 沿直线 $y=mx$ 趋于 $(0,0)$ 时，成立

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{(m^2x^2-x)^2}{m^4x^4+x^2}=1;$$

当点 $\boldsymbol{x}=(x,y)$ 沿 y 轴趋于 $(0,0)$ 时，也成立 $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=0}} f(x,y)=1$，因此当点 $\boldsymbol{x}=(x,y)$ 沿任何直线趋于 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 极限存在且相等。

但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的极限不存在。事实上，f 在抛物线 $y^2=x$ 上的值为 0，因此当点 $\boldsymbol{x}=(x,y)$ 沿这条抛物线趋于 $(0,0)$ 时，它的极限为 0。

一元函数的极限性质，如唯一性、局部有界性、局部保序性、局部夹逼性及极限的四则运算法则，对二元函数依然成立，这里不再细述，请读者自行加以证明。

一元函数的极限性质，如唯一性、局部有界性、局部保序性、局部夹逼性及极限的四则运算法则，对二元函数依然成立，这里不再细述，请读者自行加以证明。

累次极限

对重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$（即 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$），人们很自然会想到的是，能否在一定条件下将重极限 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 分解成为两个独立的极限 $x\to x_0$ 和 $y\to y_0$，再利用一元函数的极限理论和方法逐个处理之？

这后一种极限称为**累次极限**。

定义 11. 2. 3　设 $\mathbf{D}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的开集，$(x_0, y_0) \in \mathbf{D}$ 为一定点，$z = f(x, y)$ 为定义在 $\mathbf{D} \setminus \{(x_0, y_0)\}$ 上的二元函数。如果对于每个固定的 $y \neq y_0$，极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$ 存在，并且极限

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$$

存在，那么称此极限值为函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的先对 x 后对 y 的**二次极限**。

同理可定义先对 y 后对 x 的二次极限 $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$。

累次极限存在与重极限存在的关系很复杂。例 11.2.3 和例 11.2.4 其实已经告诉我们，二次极限存在不能保证二重极限存在（请读者思考理由）。而从下面的例子可以知道，二重极限存在同样不能保证二次极限存在。

累次极限存在与重极限存在的关系很复杂。例 11.2.3 和例 11.2.4 其实已经告诉我们，二次极限存在不能保证二重极限存在（请读者思考理由）。而从下面的例子可以知道，二重极限存在同样不能保证二次极限存在。

例 11.2.5 （二重极限存在，但两个二次极限不存在）设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}, & x\neq 0\text{且}y\neq 0,\\ 0, & x=0\text{或}y=0.\end{cases}$$

由于

$$|f(x,y)|\leqslant x^2+y^2,$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$。但在 $(0,0)$ 点两个二次极限显然不存在。

例 11.2.6 （二重极限存在，两个二次极限中有一个不存在）设

$$f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \text{ 且 } y\neq 0, \\ 0, & x=0 \text{ 或 } y=0. \end{cases}$$

在 $(0,0)$ 点显然有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$，即二重极限存在。且

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{x}\right]=0,$$

但先对 x 后对 y 的二次极限不存在。

例 11.2.6 （二重极限存在，两个二次极限中有一个不存在）设

$$f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \text{ 且 } y\neq 0, \\ 0, & x=0 \text{ 或 } y=0. \end{cases}$$

在$(0,0)$点显然有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$，即二重极限存在。且

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{x}\right]=0,$$

但先对x后对y的二次极限不存在。

此外一个二次极限存在不能保证另一个二次极限也存在；即使两个二次极限都存在，也不一定相等。也就是说，**两个极限运算不一定可以交换次序**（参见本节习题 8（2））。

在二重极限存在时，我们有下面的结果：

定理 11.2.1 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点存在二重极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A,$$

且当 $x\neq x_0$ 时存在极限

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x),$$

那么 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的先对 y 后对 x 的二次极限存在且与二重极限相等，即

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A。$$

证 只要证明$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$即可。

对于任意给定的$\varepsilon>0$，由于$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$，所以存在$\delta>0$，使得当$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$时有

$$|f(x,y)-A|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是对于每个满足$0<|x-x_0|<\delta$的x，令$y\to y_0$，就得到

$$|\varphi(x)-A|=\lim_{y\to y_0}|f(x,y)-A|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon。$$

这就是说，对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，

$$|\varphi(x)-A|<\varepsilon。$$

同样可证：在二重极限存在的情况下，如果当 $y \neq y_0$ 时存在极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y) = \phi(y)$，那么

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y) = \lim_{y \to y_0} \phi(y) = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) \text{。}$$

所以，若函数 $f(x,y)$ 的二重极限及两个二次极限都存在，则三者必相等，即

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) \text{。}$$

这意味着，此时**极限运算可以交换次序**。

多元函数的连续性

定义 11.2.4 设 $\mathbf{D}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的开集，$z=f(\boldsymbol{x})$ 是定义在 $\mathbf{D}$ 上的函数，$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{D}$ 为一定点。如果

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0),$$

则称函数 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ **连续**。用"$\varepsilon-\delta$"语言来说就是：如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 时，成立

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon,$$

则称函数 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 连续。

如果函数 f 在 $\mathbf{D}$ 上每一点连续，就称 f 在 $\mathbf{D}$ 上连续，或称 f 是 $\mathbf{D}$ 上的**连续函数**。

例 11.2.7 函数 $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续。

证 设 (x_0,y_0) 为 $\mathbf{R}^2$ 上的任一点，则有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|\sin\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}|$$

$$=2\left|\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}}{2}\right|\leq\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}\right|$$

$$\leqslant\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

（利用三角不等式）。

例 11.2.7 函数 $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续。

证 设 (x_0,y_0) 为 $\mathbf{R}^2$ 上的任一点，则有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|\sin\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}|$$

$$=2\left|\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}{2}\right|\le\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}\right|$$

$$\leqslant\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$ （利用三角不等式）。

于是，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时就成立

$$\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon。$$

这说明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续。由于 (x_0,y_0) 为 $\mathbf{R}^2$ 上的任一点，所以 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续。

一元连续函数和差积商及复合函数性质同样可以平行地推广到多元连续函数。

例 11.2.8 计算极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

解 注意到函数 $\ln(x+e^y)$ 和 $\sqrt{x^2+y^2}$ 在其自然定义域上的连续性，由极限的运算法则，得到

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\ln(x+e^y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\sqrt{x^2+y^2}}=\ln 2\text{。}$$

例 11.2.9 计算极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left[(y+1)\sqrt{x^2+y^2}\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

解 利用 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$，得到

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left[(y+1)\sqrt{x^2+y^2}\right]}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left[(y+1)\sqrt{x^2+y^2}\right]}{(y+1)\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(y+1)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left[(y+1)\sqrt{x^2+y^2}\right]}{(y+1)\sqrt{x^2+y^2}}\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)}(y+1) = 1。$$

向量值函数

平面解析几何中熟知的参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t \in [t_0, t_1]$$

是一元函数的另一种推广：多个因变量（x 和 y）按某种规律，随自变量 t 的变化而相应变化。

向量值函数

平面解析几何中熟知的参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t \in [t_0, t_1]$$

是一元函数的另一种推广：多个因变量（x 和 y）按某种规律，随自变量 t 的变化而相应变化。

定义 11.2.3 设 $\mathbf{D}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的点集，$\mathbf{D}$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的映射

$$\boldsymbol{f} : \mathbf{D} \to \mathbf{R}^m,$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto \mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_m)$$

称为 **n元 m 维向量值函数**（或**多元函数组**），记为 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$。$\mathbf{D}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 的**定义域**，$f(\mathbf{D}) = \{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^m \mid \mathbf{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \mathbf{D}\}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 的**值域**。

多元函数是 $m = 1$ 的特殊情形。

显然，每个z_i（$i=1,2,\cdots,m$）都是$\boldsymbol{x}$的函数$z_i=f_i(\boldsymbol{x})$，它称为$\boldsymbol{f}$的第i个坐标（或分量）函数，于是，$\boldsymbol{f}$可以表达为分量形式

$$\begin{cases} z_1 = f_1(\boldsymbol{x}), \\ z_2 = f_2(\boldsymbol{x}), \\ \quad\cdots\cdots \\ z_m = f_m(\boldsymbol{x}), \end{cases} \qquad \boldsymbol{x}\in\mathbf{D}。$$

因此$\boldsymbol{f}$又可表示为

$$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)。$$

例 11.2.10 映射

$$\boldsymbol{f}:[0,+\infty)\times[0,2\pi]\to\mathbf{R}^3,$$
$$(r,\theta)\mapsto(x,y,z)$$

的具体分量形式是

$$\begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos\theta, \\ y = y(r,\theta) = r\sin\theta, \qquad r\in[0,+\infty),\ \theta\in[0,2\pi], \\ z = z(r,\theta) = r, \end{cases}$$

这是二元三维向量值函数，在空间解析几何中知道，这是三维空间上的一张半圆锥面。

定义 11.2.2' 设 $\mathbf{D}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的开集，$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{D}$ 为一定点，$\boldsymbol{f}: \mathbf{D} \backslash \{\boldsymbol{x}_0\} \to \mathbf{R}^m$ 是映射（向量值函数），$\boldsymbol{A}$ 是一个 m 维向量。如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{x}_0, \delta) \backslash \{\boldsymbol{x}_0\}$ 时，成立

$$\left| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A} \right| < \varepsilon \quad （即\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in O(\boldsymbol{A}, \varepsilon)），$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 时 $\boldsymbol{f}$ 的**极限**，并称 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 时 $\boldsymbol{f}$ **收敛**。记为

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} \quad 或 \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{A}\ (\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0)。$$

定义 11.2.4' 设$\mathbf{D}$是$\mathbf{R}^n$上的开集，$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{D}$ 为一定点。$\boldsymbol{f}:\mathbf{D}\to\mathbf{R}^m$是映射（向量值函数）。如果$\boldsymbol{f}$满足

$$\lim_{x\to x_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),$$

那么称$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$点**连续**。用“$\varepsilon-\delta$”语言来说就是：如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{x}_0,\delta)$时，成立

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon \quad （即 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in O(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\varepsilon)），$$

则称$\boldsymbol{f}$在点$\boldsymbol{x}_0$连续。

如果映射$\boldsymbol{f}$在$\mathbf{D}$上每一点连续，就称$\boldsymbol{f}$在$\mathbf{D}$上连续。这时称映射$\boldsymbol{f}$为$\mathbf{D}$上的**连续映射**。

定理 11.2.2 设 $\mathbf{D}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的开集， $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{D}$ 为一定点。那么映射 $\boldsymbol{f}:\mathbf{D} \to \mathbf{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点连续的充分必要条件为：函数 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点连续。

定理 11.2.2 设 $\mathbf{D}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的开集， $\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{D}$ 为一定点。那么映射 $\boldsymbol{f}:\mathbf{D}\to\mathbf{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点连续的充分必要条件为：函数 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点连续。

定理的证明可由不等式

$$|f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{x}_0)| \leqslant |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|=\sqrt{\sum_{i=1}^m(f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0))^2}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^m|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0)| \qquad （j=1,2,\cdots,m）$$

直接得到。

例 11.2.11 设 $\mathbf{D}=\{(u,v)\in\mathbf{R}^2 \mid a<u<b, c<v<d\}$。映射

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}:\mathbf{D}&\to\mathbf{R}^3,\\(u,v)&\mapsto(x,y,z)\end{aligned}$$

是二元三维向量值函数，它写成分量形式就是

$$\begin{cases}x=x(u,v),\\y=y(u,v),\\z=z(u,v),\end{cases}\qquad (u,v)\in\mathbf{D}\text{。}$$

如果 $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ 都是 $\mathbf{D}$ 上的连续函数，从几何上看，这就是三维空间上的连续曲面的一般方程。

设 $\mathbf{\Omega}$ 是$\mathbf{R}^k$上的开集，$\mathbf{D}$ 为$\mathbf{R}^n$上的开集。$\boldsymbol{g}$：$\mathbf{D}\to\mathbf{R}^k$与$\boldsymbol{f}$：$\mathbf{\Omega}\to\mathbf{R}^m$为映射。

若 $\boldsymbol{g}$ 的值域$g(\mathbf{D})$满足$\boldsymbol{g}(\mathbf{D})\subset\mathbf{\Omega}$ ，则可以定义**复合映射**

$$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}:\mathbf{D}\to\mathbf{R}^m,$$

$$\boldsymbol{u}\mapsto\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}))。$$

定理 11.2.3 如果$\boldsymbol{g}$在$\mathbf{D}$上连续,$\boldsymbol{f}$在$\mathbf{\Omega}$上连续,那么复合映射 $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ 在 $\mathbf{D}$ 上连续。