§7　条件极值问题与Lagrange乘数法

Lagrange 乘数法

在考虑函数的极值或最值问题时，经常需要对函数的自变量附加一定的条件。例如，求原点到直线

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$$

的距离，就是在限制条件 $x+y+z=1$ 和 $x+2y+3z=6$ 的情况下，计算函数 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的最小值。这就是所谓的**条件极值**问题。

以三元函数为例，条件极值问题的提法是：求**目标函数**

$$f(x,y,z)$$

在**约束条件**

$$\begin{cases} G(x,y,z)=0, \\ H(x,y,z)=0 \end{cases}$$

下的极值。

假定 f,F,G 具有连续偏导数，且 Jacobi 矩阵

$$J=\begin{pmatrix} G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix}$$

在满足约束条件的点处是满秩的，即 $\operatorname{rank} J=2$。

先考虑条件极值点所满足的必要条件。上述约束条件可看成是空间曲线的方程。设曲线上一点 (x_0,y_0,z_0) 为条件极值点，由于在该点 $\operatorname{rank} J=2$，不妨假设在 (x_0,y_0,z_0) 点 $\dfrac{\partial(G,H)}{\partial(y,z)}\neq 0$，则由隐函数存在定理，在 (x_0,y_0,z_0) 附近由该方程可以唯一确定

$$y=y(x),\quad z=z(x),\quad x\in O(x_0,\rho)$$ （$y_0=y(x_0), z_0=z(x_0)$）。

它是曲线方程的参数形式。

将它们代入目标函数，原问题就转化为函数

$$\Phi(x)=f(x,y(x),z(x)),\quad x\in O(x_0,\rho)$$

的无条件极值问题， x_0 是函数 $\Phi(x)$ 的极值点，因此 $\Phi'(x_0)=0$， 即

$$f_x(x_0,y_0,z_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)\frac{dy}{dx}+f_z(x_0,y_0,z_0)\frac{dz}{dx}=0$$ 。

这说明向量

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)=f_x(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{k}$$

与向量$\boldsymbol{\tau}=\left(1,\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}\right)$正交，即与曲线在$(x_0,y_0,z_0)$点的切向量正交，因此$\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)$可看作是曲线在$(x_0,y_0,z_0)$点处的法平面上的向量。由定理 12.5.1，这个法平面是由$\operatorname{grad} G(x_0,y_0,z_0)$与$\operatorname{grad} H(x_0,y_0,z_0)$张成的，因此$\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)$可以由$\operatorname{grad} G(x_0,y_0,z_0)$和$\operatorname{grad} H(x_0,y_0,z_0)$线性表出，或者说，存在常数$\lambda_0,\mu_0$，使得

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)=\lambda_0 \operatorname{grad} G(x_0,y_0,z_0)+\mu_0 \operatorname{grad} H(x_0,y_0,z_0),$$

这就是点(x_0,y_0,z_0)为条件极值点所满足的必要条件。

将这个方程按分量写出就是

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0,z_0)-\lambda_0 G_x(x_0,y_0,z_0)-\mu_0 H_x(x_0,y_0,z_0)=0, \\ f_y(x_0,y_0,z_0)-\lambda_0 G_y(x_0,y_0,z_0)-\mu_0 H_y(x_0,y_0,z_0)=0, \\ f_z(x_0,y_0,z_0)-\lambda_0 G_z(x_0,y_0,z_0)-\mu_0 H_z(x_0,y_0,z_0)=0. \end{cases}$$

于是，如果构造 **Lagrange** 函数

$$L(x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda G(x,y,z)-\mu H(x,y,z)$$

（λ,μ 称为 **Lagrange** 乘数），则条件极值点就在方程组

$$\begin{cases} L_x=f_x-\lambda G_x-\mu H_x=0, \\ L_y=f_y-\lambda G_y-\mu H_y=0, \\ L_z=f_z-\lambda G_z-\mu H_z=0, \\ G=0, \\ H=0 \end{cases}$$

的所有解 $(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)$ 所对应的点 (x_0,y_0,z_0) 中。用这种方法来求可能的条件极值点的方法，称为 **Lagrange** 乘数法。

作为一个例子，现在用 Lagrange 乘数法来解决本节开始提出的问题，即求函数

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

在约束条件

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

下的最小值（最小值的平方根就是距离）。为此，作 Lagrange 函数

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y + z - 1) - \mu(x + 2y + 3z - 6),$$

在方程组

$$\begin{cases} L_x = 2x - \lambda - \mu = 0, \\ L_y = 2y - \lambda - 2\mu = 0, \\ L_z = 2z - \lambda - 3\mu = 0, \\ x + y + z - 1 = 0, \\ x + 2y + 3z - 6 = 0. \end{cases}$$

中，把方程组中的第一、第二和第三式相加，再利用第四式得

$$3\lambda + 6\mu = 2\text{。}$$

把第一式、第二式的两倍和第三式的三倍相加，再利用第五式得

$$6\lambda+14\mu=12\text{。}$$

从以上两个方程解得

$$\lambda=-\frac{22}{3},\ \mu=4\text{，}$$

由此可得唯一的可能极值点 $x=-\frac{5}{3},\ y=\frac{1}{3},\ z=\frac{7}{3}$。

由于点到直线的距离，即这个问题的最小值必定存在，因此这个唯一的可能极值点 $\left(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right)$ 必是最小值点，也就是说，原点到直线 $\begin{cases}x+y+z=1,\\ x+2y+3z=6\end{cases}$ 的距离为

$$\sqrt{F\left(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right)}=\sqrt{\frac{25}{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}\text{。}$$

一般地，考虑目标函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 m 个约束条件

$$g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \quad (i=1,2,\cdots,m;\ \ m<n)$$

下的极值，这里 $f, g_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 具有连续偏导数，且 Jacobi 矩阵

$$J=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

在满足约束条件的点处是满秩的，即 $\operatorname{rank} J=m$。那么我们有下述类似的结论：

定理 12.7.1（条件极值的必要条件） 若点 $\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 为函数 $f(\boldsymbol{x})$ 满足约束条件的条件极值点，则必存在 m 个常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使得在 $\boldsymbol{x}_0$ 点成立

$$\operatorname{grad} f=\lambda_1 \operatorname{grad} g_1+\lambda_2 \operatorname{grad} g_2+\cdots+\lambda_m \operatorname{grad} g_m\text{。}$$

于是可以将 Lagrange 乘数法推广到一般情形。同样地构造 Lagrange 函数

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

那么条件极值点就在方程组

（*） $$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f}{\partial x_k} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_k} = 0, \\ g_l = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots, n;\ l = 1, 2, \cdots, m)$$

的所有解 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$ 所对应的点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中。

判断如上所得的点是否为极值点有以下的一个充分条件，我们不加证明地给出。

定理 12.7.2 设点 $\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 及 m 个常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 满足方程组（*），则当方阵

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_l}(\boldsymbol{x}_0,\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_m)\right)_{n\times n}$$

为正定（负定）矩阵时，$\boldsymbol{x}_0$ 为满足约束条件的条件极小（大）值点，$f(\boldsymbol{x}_0)$ 为满足约束条件的条件极小（大）值。

注 当定理中的方阵为不定时，并不能说明 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 不是极值。例如，在求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ 在约束条件 $z=0$ 下的极值时，构造 Lagrange 函数 $L(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-\lambda z$，并解方程组

$$\begin{cases} L_x = 2x = 0, \\ L_y = 2y = 0, \\ L_z = -2z-\lambda = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

得 $x=y=z=\lambda=0$。而在 $(0,0,0,0)$ 点，方阵

$$\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

是不定的。但在约束条件 $z=0$ 下，$f(x,y,z)=x^2+y^2 \ge f(0,0,0)=0$，即 $f(0,0,0)$ 是条件极小值。

在实际问题中往往遇到的是求最值问题，这时可以根据问题本身的性质判定最值的存在性。这样的话，只要把用 Lagrange 乘数法所解得的点的函数值加以比较，最大的（最小的）就是所考虑问题的最大值（最小值）。

例 12.7.1 要制造一个容积为 a 立方米的无盖长方形水箱，问这个水箱的长、宽、高为多少米时，用料最省？

解 设水箱的长为 x、宽为 y、高为 z（单位：米），那么问题就变成在水箱容积

$$xyz = a$$

的约束条件下，求水箱的表面积

$$S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$$

的最小值。

作 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xy+2xz+2yz-\lambda(xyz-a)\ ,$$

从方程组

$$\begin{cases} L_x = y+2z-\lambda yz=0, \\ L_y = x+2z-\lambda xz=0, \\ L_z = 2x+2y-\lambda xy=0, \\ \qquad xyz-a=0 \end{cases}$$

得到唯一解

$$x=\sqrt[3]{2a},\quad y=\sqrt[3]{2a},\quad z=\frac{\sqrt[3]{2a}}{2}\ 。$$

由于问题的最小值必定存在，因此它就是最小值点。也就是说，当水箱的底为边长是$\sqrt[3]{2a}$米的正方形，高为$\sqrt[3]{2a}/2$米时，用料最省。

例 12.7.2 求平面$x+y+z=0$与椭球面$x^2+y^2+4z^2=1$相交而成的椭圆的面积。

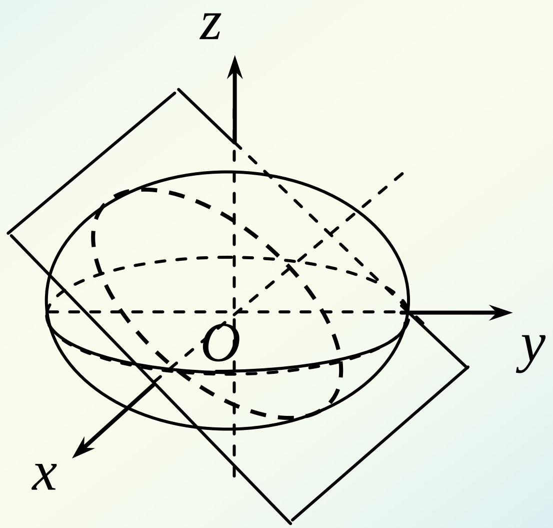

图 12.7.1

解 椭圆的面积为πab，其中a,b分别为椭圆的两个半轴，因为椭圆的中心在原点，所以a,b分别是椭圆上的点到原点的最大距离与最小距离。

于是，可以将问题表述为，求

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

在约束条件

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+4z^2=1 \end{cases}$$

下的最大值与最小值。

作 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2-\lambda(x+y+z)-\mu(x^2+y^2+4z^2-1),$$

得到相应的方程组

$$\begin{cases} L_x=2(1-\mu)x-\lambda=0, \\ L_y=2(1-\mu)y-\lambda=0, \\ L_z=2(1-4\mu)z-\lambda=0, \\ x+y+z=0, \\ x^2+y^2+4z^2-1=0. \end{cases}$$

解法一： . 将以上方程组中的第一式乘以 $1-4\mu$，第二式乘以 $1-4\mu$，第三式乘以 $1-\mu$ 后相加，得到

$$3\lambda(1-3\mu)=0,$$

因此 $\lambda=0$ 或 $1-3\mu=0$。

分两种情况讨论：

（1）当 $\lambda=0$ 时，将以上方程组中的前三个式子相加得

$$6\mu z=0。$$

但此时 $\mu\neq 0$（否则从 $\lambda=0,\ \mu=0$ 得到 $x=y=z=0$，这不是椭圆上的点），因此 $z=0$。代入方程组 $x+y+z=0$， $x^2+y^2+4z^2-1=0$ 就得到 (x,y,z) 的两组解

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) 与 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),$$

f 在这两个点的值都是 1。

（1）当$1-3\mu=0$时，从方程组中的前三个式子得到

$$x=\frac{3}{4}\lambda,\quad y=\frac{3}{4}\lambda,\quad z=-\frac{3}{2}\lambda。$$

代入$L_x=x^2+y^2+4z^2-1=0$得到$\lambda=\pm\frac{2\sqrt{2}}{9}$。它对应$(x,y,z)$的两组解为

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{6},-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\text{和}\left(-\frac{\sqrt{2}}{6},-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{3}\right),$$

f在这两个点的值都是$\frac{1}{3}$。

由于椭圆的长轴与短轴必存在，因此f在椭圆$\begin{cases}x+y+z=0,\\ x^2+y^2+4z^2=1\end{cases}$上的最大值与最小值必存在，于是立即得到该椭圆的半长轴为 1，半短轴为$\frac{1}{\sqrt{3}}$，面积为$\frac{\pi}{\sqrt{3}}$。

解法二：将以上方程组中的第一式乘以x，第二式乘以y，第三式乘以z后相加，再利用$x+y+z=0$和$x^2+y^2+4z^2=1$得到

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=\mu\text{。}$$

这说明椭圆的半长轴与半短轴的平方包含在方程组关于μ的解中，所以问题转化为求μ的值。

如解法一得到 $3\lambda(1-3\mu)=0$，也分两种情况：

（1）当$1-3\mu=0$时，得$\mu=\dfrac{1}{3}$。

（1）当$\lambda=0$时，原方程组就是

$$\begin{cases}(1-\mu)x=0,\\(1-\mu)y=0,\\(1-4\mu)z=0,\\x+y+z=0,\\x^2+y^2+4z^2-1=0.\end{cases}$$

此时$\mu=1$（否则从以上方程组的第一，第二和第四式得到$x=y=z=0$，这不是椭圆上的点）。

于是同样得到，该椭圆的半长轴为 1，半短轴为$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，面积为$\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$。

许多实际问题并不需要完全解出方程组来求得最值，解法二就是一种常用的方法，可以使解决问题的方法与计算简化。

例 12.7.3 求函数 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$（$b^2-ac<0;\ a,b,c>0$）在闭区域 $\mathbf{D}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值。

解 首先考察函数 f 在 $\mathbf{D}$ 的内部 $\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 的极值，这是无条件极值问题。为此解线性方程组

$$\begin{cases} f_x=2ax+2by=0, \\ f_y=2bx+2cy=0. \end{cases}$$

由假设 $b^2-ac<0$ 知道方程组的系数行列式不等于零，因此只有零解 $x=0, y=0$，即 $(0,0)$ 点是驻点。易计算在 $(0,0)$ 点

$$f_{xx}(0,0)=2a,\quad f_{xy}(0,0)=2b,\quad f_{yy}(0,0)=2c\text{，}$$

因此 $f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)-f_{xy}{}^2(0,0)=4(ac-b^2)>0$。而 $f_{xx}>0$，所以 $(0,0)$ 点是函数 f 的极小值点，极小值为 $f(0,0)=0$。

再考察函数 f 在 **D** 的边界 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$ 上的极值，这是条件极值问题。为此作 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=ax^2+2bxy+cy^2-\lambda(x^2+y^2-1),$$

并得方程组

$$\begin{cases}(a-\lambda)x+by=0,\\ bx+(c-\lambda)y=0,\\ x^2+y^2-1=0.\end{cases}$$

将方程组中的第一式乘以 x，第二式乘以 y 后相加，再用第三式代入就得到

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=\lambda(x^2+y^2)=\lambda,$$

这说明 $f(x,y)$ 在 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$ 上的极大值与极小值包含在方程组关于 λ 的解中。

下面来求λ的值。

由联立方程组中的$x^2+y^2-1=0$，可知二元一次方程组$\begin{cases}(a-\lambda)x+by=0\\ bx+(c-\lambda)y=0\end{cases}$有非零解，因此系数行列式等于零，即

$$\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0\text{。}$$

解这个关于λ的方程，得到

$$\lambda=\frac{1}{2}\left[(a+c)\pm\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}\right]$$

（注意根号中$(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2>0$）。

由于连续函数 f 在紧集 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$ 上必可取到最大值与最小值，因此 f 在 **D** 的边界上的最大值为

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left[(a+c)+\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}\right];$$

最小值为

$$\lambda_2=\frac{1}{2}\left[(a+c)-\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}\right]。$$

再与 f 在 **D** 内部的极值 $f(0,0)=0$ 比较，就得到 f 在 **D** 上的最大值为

$$\max\{\lambda_1,0\}=\frac{1}{2}\left[(a+c)+\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}\right];$$

最小值为

$$\min\{\lambda_2,0\}=0\ 。$$

例 12.7.4 设$a>0, a_i>0$（$i=1,2,\cdots,n$）。求n元函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$$

在约束条件$x_1+x_2+\cdots+x_n=a$（$x_i>0, i=1,2,\cdots,n$）下的最大值。

解 作辅助函数

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\ln f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1\ln x_1+a_2\ln x_2+\cdots+a_n\ln x_n,$$

因为函数$\ln u$严格单调，所以只要考虑函数g的极值就可以得到f的极值。

作 Lagrange 函数

$$L = a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \cdots + a_n \ln x_n - \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a)\text{。}$$

由极值的必要条件得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{a_i}{x_i} - \lambda = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a. \end{cases}$$

由前 n 个方程得到 $x_i = \dfrac{a_i}{\lambda}$， $i = 1,2,\cdots,n$， 再代入最后一个方程得到

$$\lambda = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a},$$

所以

$$x_i = \frac{aa_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}, \quad i = 1,2,\cdots,n\text{。}$$

于是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是函数 g 的唯一可能条件极值点。

由于

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_l}(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda)\right)_{n\times n} = \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{x_1^{\ 2}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & -\frac{a_2}{x_2^{\ 2}} & & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{a_n}{x_n^{\ 2}} \end{pmatrix}$$

为负定矩阵，由定理 12.7.2 可知$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为 g 的条件极大值点。它也是 f 的唯一条件极大值点，显然它就是 f 的条件最大值点。于是 f 在约束条件下的最大值为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{aa_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right)^{a_i} = a_1^{\ a_1} a_2^{\ a_2} \cdots a_n^{\ a_n} \left(\frac{a}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right)^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}。$$

特别地，当$a_1=a_2=\cdots=a_n=1$及$a=1$时，f的最大值为$\left(\frac{1}{n}\right)^n$，即当$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$及$x_i>0\ \ (i=1,2,\cdots,n)$时成立

$$x_1x_2\cdots x_n\le\left(\frac{1}{n}\right)^n。$$

特别地，当$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$及$a = 1$时，$f$的最大值为$\left(\frac{1}{n}\right)^n$，即当$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$及$x_i > 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$时成立

$$x_1 x_2 \cdots x_n \le \left(\frac{1}{n}\right)^n 。$$

对于任意正数$y_1, y_2, \cdots, y_n$，只要令

$$x_i = \frac{y_i}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} \quad （i = 1, 2, \cdots, n），$$

就得到

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{y_i}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} \le \left(\frac{1}{n}\right)^n ,$$

即

$$\sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} \le \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} 。$$

这就是熟知的平均值不等式。

一个最优价格模型

在生产和销售商品的过程中，销售价格上涨将使厂家在单位商品上获得的利润增加，但同时也使消费者的购买欲望下降，造成销售量下降，导致厂家削减产量。而在规模生产中，单位商品的生产成本是随着产量的增加而降低的。因此销售量、成本与售价是相互影响的。厂家要选择合理的销售价格才能获得最大利润，这个价格称为**最优价格**。

例如，一家电视机厂在对某种型号电视机的销售价格决策时面对如下数据：

（1）根据市场调查，当地对该种电视机的年需求量为 100 万台；

（2）去年该厂共售出 10 万台，每台售价为 4000 元；

（3）仅生产 1 台电视机的成本为 4000 元；但在批量生产后，生产 1 万台时成本降低为每台 3000 元。

问：在生产方式不变的情况下，今年的最优销售价格是多少？

下面先建立一个一般的数学模型。设这种电视机的总销售量为x，每台生产成本为c，销售价格为v，那么厂家的利润为

$$u(c,v,x)=(v-c)x \text{。}$$

根据市场预测，销售量与销售价格之间有下面的关系：

$$x=M\,\mathrm{e}^{-\alpha v}\text{，}\quad M>0,\alpha>0\text{，}$$

这里M为市场的最大需求量，α是价格系数（这个公式也反映出，售价越高，销售量越少）。同时，生产部门对每台电视机的成本有如下测算：

$$c=c_0-k\ln x\text{，}\quad c_0,k,x>0\text{，}$$

这里c_0是只生产 1 台电视机时的成本，k是规模系数（这也反映出，产量越大即销售量越大，成本越低）。

于是，问题化为求利润函数

$$u(c,v,x)=(v-c)x$$

在约束条件

$$\begin{cases} x=Me^{-\alpha v}, \\ c=c_0-k\ln x \end{cases}$$

下的极值问题。

于是，问题化为求利润函数

$$u(c,v,x)=(v-c)x$$

在约束条件

$$\begin{cases} x=Me^{-\alpha v}, \\ c=c_0-k\ln x \end{cases}$$

下的极值问题。

作 Lagrange 函数

$$L(c,v,x,\lambda,\mu)=(v-c)x-\lambda(x-M\,\mathrm{e}^{-\alpha v})-\mu(c-c_0+k\ln x)\text{，}$$

就得到最优化条件

$$\begin{cases} L_c=-x-\mu=0, \\ L_v=x-\lambda M\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha v}=0, \\ L_x=v-c-\lambda-\mu\dfrac{k}{x}=0, \\ x-M\,\mathrm{e}^{-\alpha v}=0, \\ c-c_0+k\ln x=0. \end{cases}$$

由方程组中第二和第四式得到

$$\lambda\alpha = 1, \quad 即\ \lambda = \frac{1}{\alpha}。$$

将第四式代入第五式得到

$$c = c_0 - k(\ln M - \alpha v)。$$

再由第一式知

$$\mu = -x。$$

将所得的这三个式子代入方程组中第三式，得到

$$v - (c_0 - k(\ln M - \alpha v)) - \frac{1}{\alpha} + k = 0，$$

由此解得最优价格为

$$v^* = \frac{c_0 - k\ln M + \frac{1}{\alpha} - k}{1 - \alpha k}。$$

只要确定了规模系数k与价格系数α，问题就迎刃而解了。

现在利用这个模型解决本段开始提出的问题。此时 $M=1000000$，$c_0=4000$。

由于去年该场共售出 10 万台，每台售价为 4000 元，因此得到

$$\alpha=\frac{\ln M-\ln x}{v}=\frac{\ln 1000000-\ln 100000}{4000}=0.00058;$$

又由于生产 1 万台时成本就降低为每台 3000 元，因此得到

$$k=\frac{c_0-c}{\ln x}=\frac{4000-3000}{\ln 10000}=108.57。$$

将这些数据代入 v^* 的表达式，就得到今年的最优价格应为

$$v^*=\frac{4000-108.57\ln 1000000+\dfrac{1}{0.00058}-108.57}{1-0.00058\times 108.57}\approx 4392\text{（元 / 台）。}$$