§3 Green公式、Gauss公式和Stokes公式

Green 公式

设L为平面上的一条曲线，它的方程是$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}$，$\alpha\le t\le\beta$。如果$\boldsymbol{r}(\alpha)=\boldsymbol{r}(\beta)$，而且当$t_1,t_2\in(\alpha,\beta)$，$t_1\ne t_2$时总成立$\boldsymbol{r}(t_1)\ne\boldsymbol{r}(t_2)$，则称L为**简单闭曲线**（或 **Jordan 曲线**）。这就是说，简单闭曲线除两个端点相重合外，曲线自身不相交。

设D为平面上的一个区域。如果D内的任意一条封闭曲线都可以不经过D外的点而连续地收缩成D中一点，那么D称为**单连通区域**。否则它称为**复连通区域**。例如，圆盘$\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$是单连通区域，而圆环$\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{2}<x^2+y^2<1\right\}$是复连通区域。

单连通区域**D**也可以这样叙述：**D**内的任何一条封闭曲线所围的点集仍属于**D**。因此，通俗地说，单连通区域之中不含有“洞”，而复连通区域之中会有“洞”。

对于平面区域**D**，给它的边界∂**D**规定一个正向：如果一个人沿∂**D**的这个方向行走时，**D**总是在他左边。这个定向也称为**D**的**诱导定向**，带有这样定向的∂**D**称为**D**的正向边界。例如，如图 14.3.1 所示的区域**D**由**L**与**l**所围成，那么在我们规定的正向下，**L**为逆时针方向，而**l**为顺时针方向。

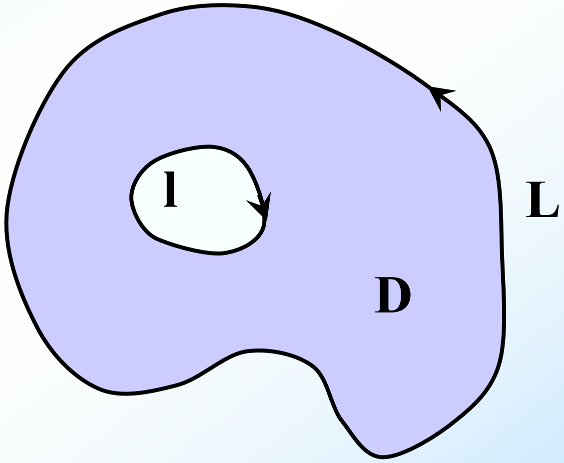

图14.3.1

定理 14.3.1（Green 公式） 设 $\mathbf{D}$ 为平面上由光滑或分段光滑的简单闭曲线所围的单连通闭区域。如果函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 上具有连续偏导数，那么

$$\int_{\partial\mathbf{D}} P dx + Q dy = \iint_{\mathbf{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \text{,}$$

其中 $\partial\mathbf{D}$ 取正向，即诱导定向。

证　先假设**D**可同时表示为以下两种形式

$$\mathbf{D}=\{(x,y)\,|y_1(x)\le y\le y_2(x),\ a\le x\le b\}$$
$$=\{(x,y)\,|x_1(y)\le x\le x_2(y),\ c\le y\le d\}$$

的情形（这时平行于x轴或y轴的直线与区域**D**的边界至多交两点）。这样的区域称为**标准区域**。

下面在这种假设下证明定理（参见图 14.3.2）。

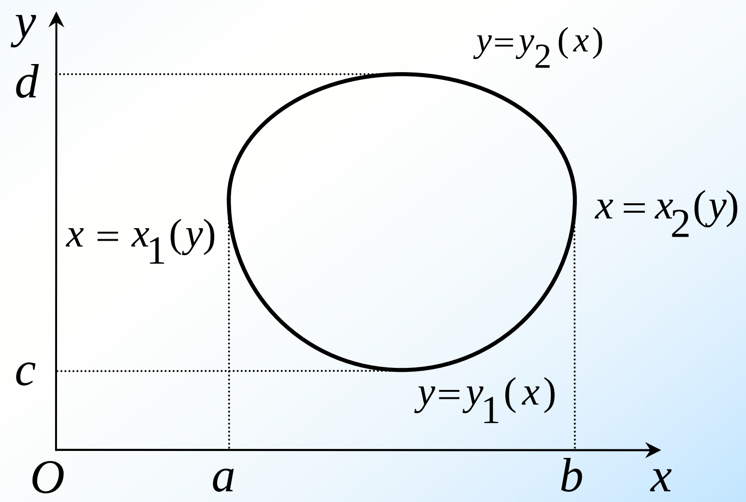

图14.3.2

$$\iint\limits_{D}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy$$

$$=\int_a^b\left[P(x,y_2(x))-P(x,y_1(x))\right]dx=-\int_a^b P(x,y_1(x))dx-\int_b^a P(x,y_2(x))dx$$

$$=-\int\limits_{\partial D}P(x,y)dx\ ,$$

式中最后一步是利用了曲线积分的计算公式。同理又有

$$\iint\limits_{D}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}dx$$

$$=\int_c^d\left[Q(x_2(y),y)-Q(x_1(y),y)\right]dy=\int_c^d Q(x_2(y),y)dy+\int_d^c Q(x_1(y),y)dy$$

$$=\int\limits_{\partial D}Q(x,y)dy\ 。$$

两式合并就得到所需的结果。

再证区域 **D** 可分成有限块标准区域的情形。我们只考虑如图 14.3.3 的区域，在这种区域上，平行于 y 轴的直线与 **D** 的边界的交点可能会多于两个。如图所示用光滑曲线 AB 将 **D** 分割成两个标准区域 $\mathbf{D}_1$ 与 $\mathbf{D}_2$（$\mathbf{D}_1$ 的边界为曲线 $ABMA$，$\mathbf{D}_2$ 的边界为曲线 $ANBA$）。因此可以应用 Green 公式得到

$$\int_{\partial \mathbf{D}_1} Pdx + Qdy = \iint_{\mathbf{D}_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

$$\int_{\partial \mathbf{D}_2} Pdx + Qdy = \iint_{\mathbf{D}_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy。$$

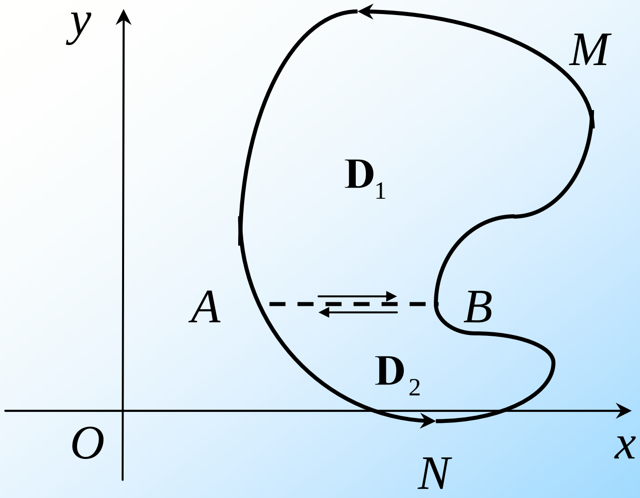

图14.3.3

注意$\mathbf{D}_1$与$\mathbf{D}_2$的公共边界AB，其方向相对于$\partial\mathbf{D}_1$而言是从A到B，相对于$\partial\mathbf{D}_2$而言是从B到A，两者方向正好相反，所以将上面的两式相加便得

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_{\mathbf{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \text{。}$$

对于 Green 公式一般情形的证明比较复杂，这里从略。

Green 公式还可以推广到具有有限个“洞”的复连通区域上去。以只有一个洞为例（见图 14.3.4），用光滑曲线连结其外边界**L**上一点M与内边界**l**上一点N，将**D**割为单连通区域。由定理 14.3.1 得到

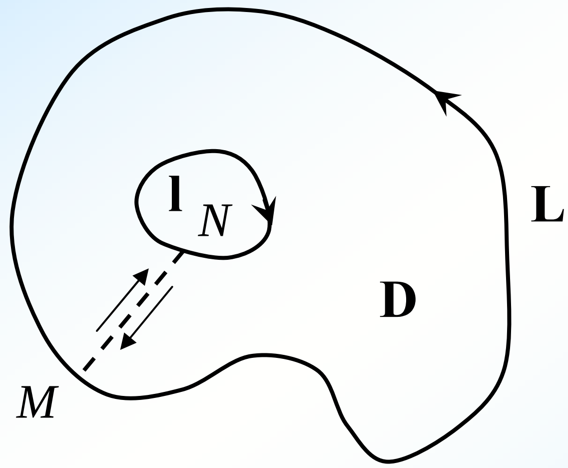

图 14.3.4

$$\iint_{\mathbf{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\left(\int_{\mathbf{L}}+\int_{MN}+\int_{\mathbf{l}}+\int_{NM}\right)Pdx+Qdy$$

$$=\left(\int_{\mathbf{L}}+\int_{\mathbf{l}}\right)Pdx+Qdy=\int_{\partial\mathbf{D}}Pdx+Qdy\,,$$

其中**L**为逆时针方向，**l**为顺时针方向，这与∂**D**的诱导定向相同。

Green 公式说明了有界闭区域上的二重积分与沿区域边界的第二类曲线积分的关系。下面再作进一步讨论：

1. 记取诱导定向的 $\partial\mathbf{D}$ 上的单位切向量为 $\boldsymbol{\tau}$，单位外法向量为 $\boldsymbol{n}$（见图 14.3.5），那么显然有

$$\cos(\boldsymbol{n},y)=-\cos(\boldsymbol{\tau},x)，\quad \cos(\boldsymbol{n},x)=\sin(\boldsymbol{\tau},x)。$$

因此得到 Green 公式的另一种常用表示形式

$$\iint_{\mathbf{D}}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\partial\mathbf{D}}Fdy-Gdx=\int_{\partial\mathbf{D}}[F\sin(\boldsymbol{\tau},x)-G\cos(\boldsymbol{\tau},x)]ds$$
$$=\int_{\partial\mathbf{D}}[F\cos(\boldsymbol{n},x)+G\cos(\boldsymbol{n},y)]ds\ ,$$

这个形式便于记忆和推广。

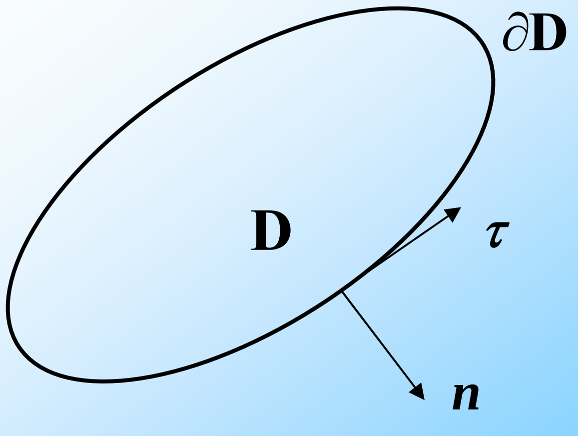

图14.3.5

2. Green 公式是 Newton-Leibniz 公式的推广。设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数，取 $\mathbf{D}=[a,b]\times[0,1]$（见图 14.3.6）。在 Green 公式中取 $P=0$，$Q=f(x)$， 就得到

$$\iint_{\mathbf{D}} f'(x)dxdy=\int_{\partial\mathbf{D}} f(x)dy。$$

利用化累次积分的方法，等式左边就是 $\int_0^1 dy\int_a^b f'(x)dx=\int_a^b f'(x)dx$。而等式右边等于

$$\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}+\int_{\overline{CD}}+\int_{\overline{DA}} f(x)dy=\int_{\overline{BC}}+\int_{\overline{DA}} f(x)dy=\int_0^1 f(b)dy+\int_1^0 f(a)dy=f(b)-f(a)\ 。$$

这就得到 Newton-Leibniz 公式

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)。$$

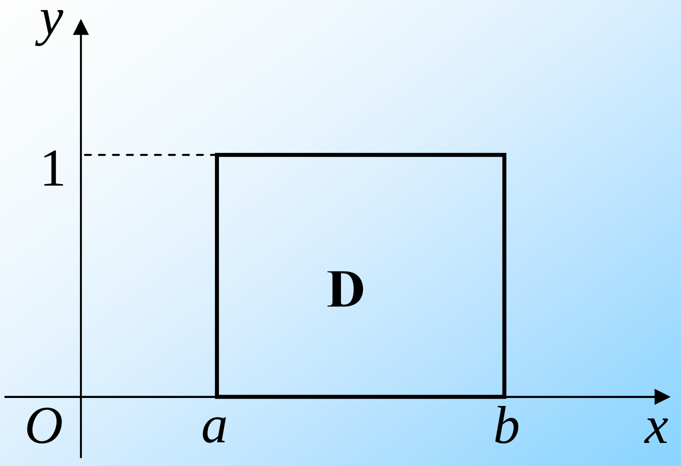

图14.3.6

3. 从 Green 公式还可以得到一个求区域面积的方法：

设 **D** 为平面上的有界闭区域，其边界为分段光滑的简单闭曲线。则它的面积为

$$S = \int_{\partial \mathbf{D}} x dy = -\int_{\partial \mathbf{D}} y dx = \frac{1}{2}\int_{\partial \mathbf{D}} x dy - y dx \text{ ,}$$

其中 ∂**D** 取正向。

例 14.3.1 计算椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a,b>0)$ 所围图形的面积。

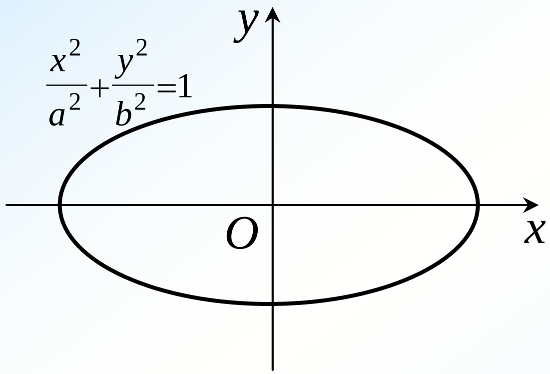

图14.3.7

解 椭圆的参数方程为

$$x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta,\ \ 0\le\theta\le 2\pi\ 。$$

设椭圆的正向边界为 **L**，那么所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(ab\cos^2\theta+ab\sin^2\theta\right)d\theta=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}d\theta=\pi ab\ 。$$

例 14. 3. 2 计算 $I=\int\limits_{\mathrm{L}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\right]dy$，其中 **L** 为曲线 $y=\sin x,\ 0\le x\le\pi$ 与直线段 $y=0,\ 0\le x\le\pi$ 所围区域 **D** 的正向边界。

解 令 $P=\sqrt{x^2+y^2}$， $Q=y\left[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\right]$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=y^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}。$$

由 Green 公式得到

$$I=\iint\limits_{\mathrm{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_{\mathrm{D}}y^2dxdy=\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x}y^2dy=\frac{1}{3}\int_0^\pi\sin^3 xdx=\frac{4}{9}。$$

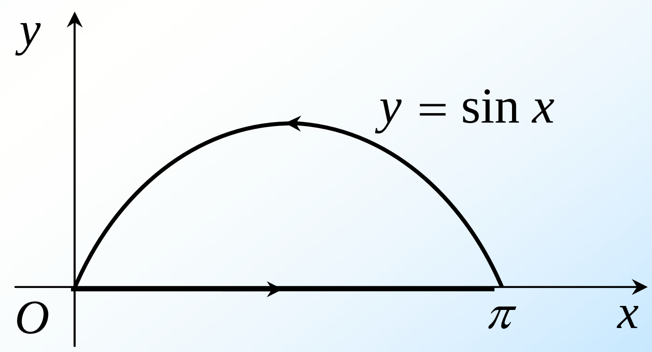

图14.3.8

例 14.3.3 计算 $I=\int_{\mathbf{L}}\left(e^x\sin y-my\right)dx+\left(e^x\cos y-m\right)dy$，其中 **L** 为圆 $(x-a)^2+y^2=a^2\ (a>0)$ 的上半圆周，方向为从点 $A(2a,0)$ 到原点 $O(0,0)$。

解 现在积分曲线不是闭的，不能直接用 Green 公式，但添加一条直线段 $\overline{OA}$（方向从 O 到 A）后，**L** 与 $\overline{OA}$ 合起来就是闭曲线。设这样得到的闭曲线所围的区域为 **D**。这时

$$P=e^x\sin y-my,\quad Q=e^x\cos y-m,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-m,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y。$$

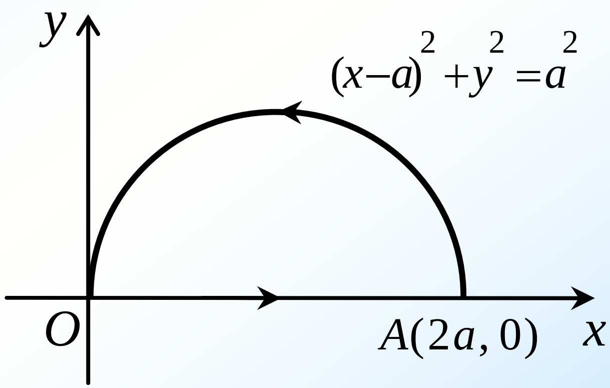

图14.3.9

利用 Green 公式，得到

$$\int_{\mathbf{L}}\left(e^x\sin y-my\right)dx+\left(e^x\cos y-m\right)dy+\int_{\overline{OA}}\left(e^x\sin y-my\right)dx+\left(e^x\cos y-m\right)dy$$

$$=m\iint_{\mathbf{D}}dxdy=\frac{m\pi a^2}{2}。$$

再计算沿$\overline{OA}$的曲线积分。因为$\overline{OA}$的方程为$y=0, x:0\to 2a$，那么

$$\int_{\overline{OA}}\left(\mathrm{e}^x\sin y-my\right)dx+\left(\mathrm{e}^x\cos y-m\right)dy=\int_0^{2a}0dx+0=0\text{。}$$

代入前面的式子，就得到

$$\int_{L}\left(\mathrm{e}^x\sin y-my\right)dx+\left(\mathrm{e}^x\cos y-m\right)dy=\frac{m\pi a^2}{2}\text{。}$$

曲线积分与路径无关的条件

容易想象，若一个函数沿着连接A，B两个端点的一条路径L积分，一般说来，积分值不仅会随端点变化而变化，还会随路径的不同而不同。

但上一节中曾指出，也有一些曲线积分的值，如重力所做的功，可以仅与路径的端点有关而与路径无关。下面就来探讨曲线积分与路径无关的条件。先给出积分与路径无关的定义：

曲线积分与路径无关的条件

容易想象，若一个函数沿着连接 A， B 两个端点的一条路径 L 积分，一般说来，积分值不仅会随端点变化而变化，还会随路径的不同而不同。

但上一节中曾指出，也有一些曲线积分的值，如重力所做的功，可以仅与路径的端点有关而与路径无关。下面就来探讨曲线积分与路径无关的条件。先给出积分与路径无关的定义：

定义 14. 3. 1 设 **D** 为平面区域， $P(x,y), Q(x,y)$ 为 **D** 上的连续函数。如果对于 **D** 内任意两点 A， B，积分值

$$\int_{\mathbf{L}} Pdx+Qdy$$

只与 A， B 两点有关，而与从 A 到 B 的路径 **L**（这里只考虑光滑或分段光滑曲线）无关，就称曲线积分 $\int_{\mathbf{L}} Pdx+Qdy$ **与路径无关**。否则称为**与路径有关**。

定理 14.3.2（Green 定理） 设 **D** 为平面上的单连通区域，$P(x,y), Q(x,y)$ 在 **D** 上具有连续偏导数。则下面的四个命题等价：

(1) 对于 **D** 内的任意一条光滑（或分段光滑）闭曲线 **L**，

$$\int_{\mathbf{L}} Pdx + Qdy = 0\ ;$$

(2) 曲线积分 $\int_{\mathbf{L}} Pdx + Qdy$ 与路径无关；

(3) 存在 **D** 上的可微函数 $U(x,y)$，使得

$$dU = Pdx + Qdy\ ,$$

即 $Pdx + Qdy$ 为 $U(x,y)$ 的全微分，这时称 $U(x,y)$ 为 1-形式 $Pdx + Qdy$ 的**原函数**；

(4) 在 **D** 内成立等式

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ 。$$

证 （1）$\Rightarrow$（2）：设 A，B 为 $\mathbf{D}$ 内任意两点，$\mathbf{L}_1$ 和 $\mathbf{L}_2$ 是 $\mathbf{D}$ 中从 A 到 B 的任意两条路径，则 $\mathbf{C}=\mathbf{L}_1+(-\mathbf{L}_2)$ 就是 $\mathbf{D}$ 中的一条闭曲线。因此

$$0=\int_{\mathbf{C}} Pdx+Qdy=\left(\int_{\mathbf{L}_1}+\int_{-\mathbf{L}_2}\right)Pdx+Qdy=\int_{\mathbf{L}_1} Pdx+Qdy-\int_{\mathbf{L}_2} Pdx+Qdy,$$

于是

$$\int_{\mathbf{L}_1} Pdx+Qdy=\int_{\mathbf{L}_2} Pdx+Qdy,$$

因此曲线积分与路径无关。

（2）$\Rightarrow$（3）：取一定点 $(x_0, y_0) \in \mathbf{D}$，作函数

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy\,,$$

这里积分沿从 (x_0, y_0) 到 (x, y) 的任意路径。由于曲线积分与路径无关，因此 $U(x,y)$ 是有确定意义的。取如图 14.3.10 所示的积分路径时，就成立

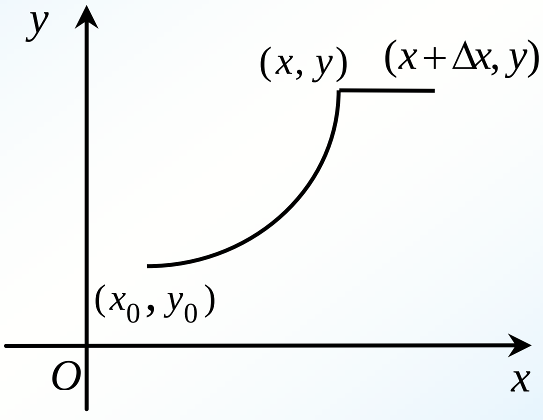

图14.3.10

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{U(x+\Delta x, y) - U(x,y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx + Qdy - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy\right)$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx + Qdy = \frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} P(t,y)dt = P(\xi, y)\,,$$

其中 ξ 在 x 与 $x+\Delta x$ 之间，这是利用了积分中值定理。因此

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta U}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(\xi, y) = P(x,y)\,。$$

同理可证 $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$。所以在 $\mathbf{D}$ 内成立 $dU = Pdx + Qdy$。

（3）$\Rightarrow$（4）：由于存在 **D** 上的可微函数 U，使得 $dU = Pdx + Qdy$，因此

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) 。$$

又由于函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 **D** 内具有连续偏导数，于是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} 。$$

（3）$\Rightarrow$（4）：由于存在 $\mathbf{D}$ 上的可微函数 U，使得 $dU = Pdx + Qdy$，因此

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)。$$

又由于函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 内具有连续偏导数，于是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}。$$

（4）$\Rightarrow$（1）：　对于包含在 $\mathbf{D}$ 内的光滑（或分段光滑）闭曲线 $\mathbf{L}$，设它包围的图形是 $\tilde{\mathbf{D}}$，那么由 Green 公式就得到

$$\int_{\mathbf{L}} Pdx + Qdy = \iint_{\tilde{\mathbf{D}}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0。$$

上面的证明还给出了当曲线积分与路径无关时，$Pdx+Qdy$ 在 **D** 上的原函数的构造方法，即

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy \text{。}$$

设 $A(x_A,y_A),\ B(x_B,y_B)\in \mathbf{D}$，对于从 A 到 B 的任意路径 **L**，任取一条 **D** 内从 (x_0,y_0) 到 A 的路径 **l**，则

$$U(x_A,y_A)=\int_{\mathbf{l}} Pdx+Qdy,\quad U(x_B,y_B)=\int_{\mathbf{l+L}} Pdx+Qdy \text{。}$$

因此

$$\int_{\mathbf{L}} Pdx+Qdy=\int_{\mathbf{l+L}} Pdx+Qdy-\int_{\mathbf{l}} Pdx+Qdy=U(x_B,y_B)-U(x_A,y_A) \text{。}$$

于是得到：

定理 14.3.3 设 **D** 为平面单连通区域，$P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 为 **D** 上的连续函数。那么曲线积分 $\int_{\mathbf{L}} Pdx+Qdy$ 与路径无关的充分必要条件是在 **D** 上存在 $Pdx+Qdy$ 的一个原函数 $U(x,y)$。这时，对于 **D** 内任意两点 $A(x_A,y_A), B(x_B,y_B)$，计算公式

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy = U(x_B,y_B)-U(x_A,y_A)\text{。}$$

成立，其中 $\overset{\frown}{AB}$ 为任意从 A 到 B 的路径。

求 $Pdx+Qdy$ 的原函数常用的是如图 14.3.11 所示的两个常规积分路径。

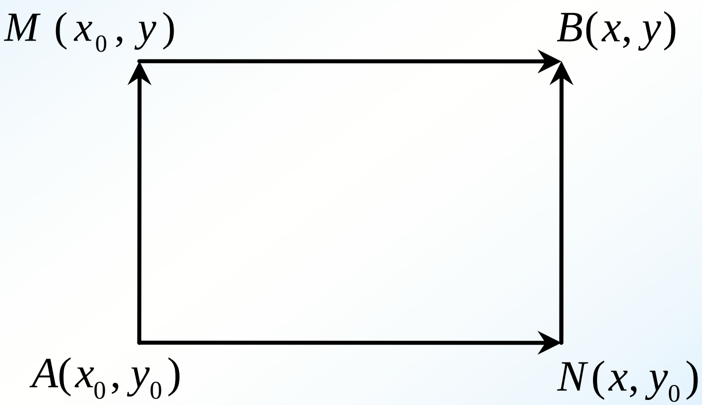

图14.3.11

由于

$$U(x,y)-U(x_0,y_0)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy\text{，}$$

如果积分路径取 *ANB*，则

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy+U(x_0,y_0)$$

$$=\int_{AN} Pdx+Qdy+\int_{NB} Pdx+Qdy+U(x_0,y_0)$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+c\,.$$

其中 $c=U(x_0,y_0)$ 为任意常数。如果积分路径取 *AMB*，同样可以得到

$$U(x,y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)dy+c\ \ 。$$

例 14. 3. 4 证明在整个 xy 平面上，$\left(e^x \sin y - my\right)dx + \left(e^x \cos y - mx\right)dy$ 是某个函数的全微分，求这样一个函数，并计算

$$I = \int_L \left(e^x \sin y - my\right)dx + \left(e^x \cos y - mx\right)dy,$$

其中 $\mathbf{L}$ 为从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的任意一条道路。

解 令 $P(x,y) = e^x \sin y - my,\ Q(x,y) = e^x \cos y - mx$，于是恒成立

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - m = \frac{\partial Q}{\partial x}。$$

由定理 14.3.2 知 $\left(e^x \sin y - my\right)dx + \left(e^x \cos y - mx\right)dy$ 是某个函数的全微分。

取路径如图 14.3.12，那么它的一个原函数为

$$U(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(e^x\sin y-my\right)dx+\left(e^x\cos y-mx\right)dy$$

$$=\left(\int_{OA}+\int_{AB}\right)\left(e^x\sin y-my\right)dx+\left(e^x\cos y-mx\right)dy$$

$$=\int_0^x 0dx+\int_0^y\left(e^x\cos y-mx\right)dy=e^x\sin y-mxy\,.$$

于是由定理 14.3.3 得到

$$I=\int_{\mathbf{L}}\left(e^x\sin y-my\right)dx+\left(e^x\cos y-mx\right)dy$$

$$=U(1,1)-U(0,0)=\mathrm{e}\sin 1-m\text{。}$$

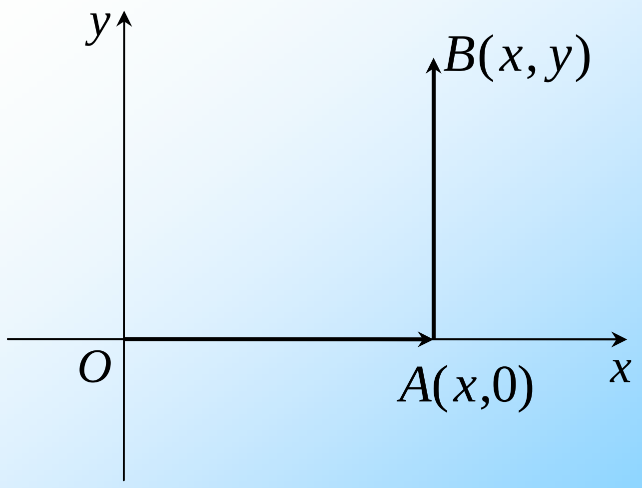

图14.3.12

例 14.3.5 计算 $\int_{L} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$，其中 **L** 为一条不经过原点的简单闭曲线，方向为逆时针方向。

解 设 **L** 所围的区域为 **D**。这时 $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$， $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad x^2 + y^2 \neq 0。$$

于是当 **D** 不包含原点时，由 Green 公式即得

$$\int_{L} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0。$$

当 **D** 包含原点时，函数 P, Q 在原点不满足 Green 公式的条件，因此不能直接使用。但在 **D** 中挖去一个以原点为心，半径为 r 的小圆盘后，对于余下的部分 Green 公式的条件就满足了。记 **D** 中挖去小圆盘后的区域为 $\mathbf{D}_1$， 小圆盘的边界为 **l**（见图 14.3.13），在区域 $\mathbf{D}_1$ 上应用 Green 公式得

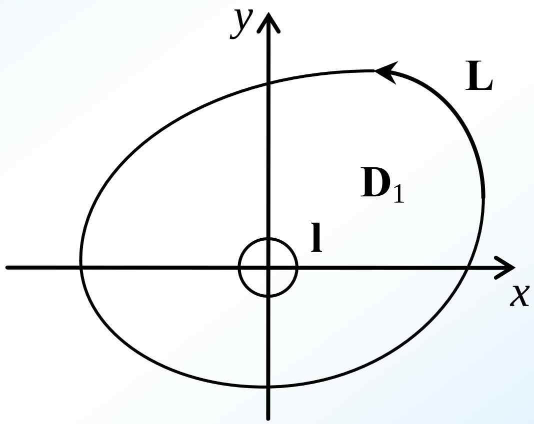

图14.3.13

$$\int_{\mathbf{L}} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \int_{\mathbf{l}} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0\text{。}$$

注意上式对 **l** 取的方向是逆时针方向，这时 **l** 的参数方程为

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta \quad (0 \le \theta \le 2\pi)\text{，}$$

因此

$$\int_{\mathbf{L}} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_{\mathbf{l}} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2} d\theta = 2\pi\text{。}$$

这个例子说明，定理 14.3.2 中对于区域是单连通和函数 P, Q 具有连续偏导数的要求是必要的。

Gauss 公式

设Ω为空间上的一个区域。如果Ω内的任何一张封闭曲面所围的立体仍属于Ω，那么称Ω为**二维单连通区域**，否则称Ω为**二维复连通区域**。通俗地说，二维单连通区域之中不含有“洞”，而二维复连通区域之中含有“洞”。例如，单位球$\{(x,y,z)|\, x^2+y^2+z^2<1\}$是二维单连通区域，而空心球$\{(x,y,z)\,|\,\frac{1}{2}<x^2+y^2+z^2<1\}$是二维复连通区域。

Gauss 公式

设Ω为空间上的一个区域。如果Ω内的任何一张封闭曲面所围的立体仍属于Ω，那么称Ω为**二维单连通区域**，否则称Ω为**二维复连通区域**。通俗地说，二维单连通区域之中不含有“洞”，而二维复连通区域之中含有“洞”。例如，单位球$\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2<1\}$是二维单连通区域，而空心球$\{(x,y,z) \mid \frac{1}{2}<x^2+y^2+z^2<1\}$是二维复连通区域。

定理 14. 3. 4（Gauss 公式） 设Ω是$\mathbf{R}^3$上由光滑（或分片光滑）的封闭曲面所围成的二维单连通闭区域，函数$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$和$R(x,y,z)$在Ω上具有连续偏导数。则成立

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint_{\partial\Omega}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy,$$

这里$\partial\Omega$的定向为外侧，它称为Ω的**诱导定向**。

证 考虑$\mathbf{\Omega}$可同时表为以下三种形式

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega} &= \{(x,y,z) \mid z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),\ (x,y) \le \mathbf{\Omega}_{xy}\} \\ &= \{(x,y,z) \mid y_1(z,x) \le y \le y_2(z,x),\ (z,x) \le \mathbf{\Omega}_{zx}\} \\ &= \{(x,y,z) \mid x_1(y,z) \le x \le x_2(y,z),\ (y,z) \le \mathbf{\Omega}_{yz}\}\end{aligned}$$

的情形，其中$\Omega_{xy}, \Omega_{zx}, \Omega_{yz}$分别为$\mathbf{\Omega}$在$xy, zx, yz$平面的投影（见图14.3.14），这样的区域称为标准区域。

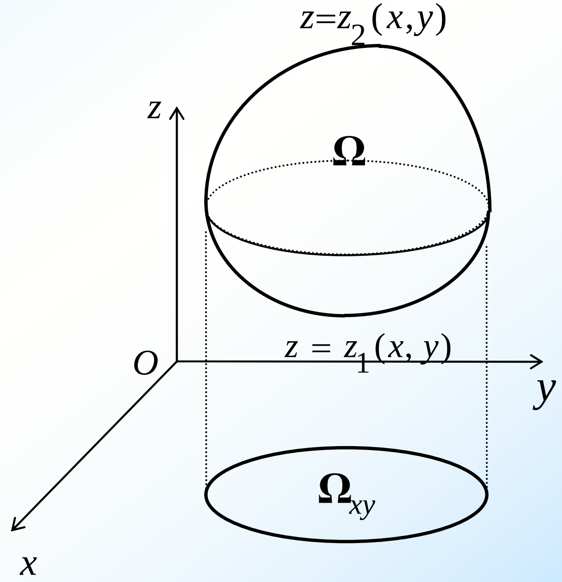

图14.3.14

设 Σ_1 为曲面 $z=z_1(x,y),\ (x,y)\in\mathbf{\Omega}_{xy}$， Σ_2 为曲面 $z=z_2(x,y),\ (x,y)\in\mathbf{\Omega}_{xy}$，按照所规定的定向，$\Sigma_1$ 的定向为下侧；Σ_2 的定向为上侧。那么利用$\mathbf{\Omega}$的第一种表示就有

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint_{\Omega_{xy}}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz$$

$$=\iint_{\Omega_{xy}}\left[R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))\right]dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma_2}R(x,y,z)dxdy+\iint_{\Sigma_1}R(x,y,z)dxdy=\iint_{\partial\Omega}R(x,y,z)dxdy\ 。$$

设Σ_1为曲面$z = z_1(x, y),\ (x, y) \in \mathbf{\Omega}_{xy}$， Σ_2为曲面$z = z_2(x, y),\ (x, y) \in \mathbf{\Omega}_{xy}$，按照所规定的定向，$\Sigma_1$的定向为下侧；$\Sigma_2$的定向为上侧。那么利用$\mathbf{\Omega}$的第一种表示就有

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\Omega_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz$$

$$= \iint\limits_{\Omega_{xy}} \left[R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y)) \right] dxdy$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_2} R(x, y, z) dxdy + \iint\limits_{\Sigma_1} R(x, y, z) dxdy = \iint\limits_{\partial\Omega} R(x, y, z) dxdy \text{。}$$

同理利用$\mathbf{\Omega}$的第二种表示和第三种表示可证

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{\partial\Omega} Q(x, y, z) dzdx \text{，} \quad \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{\partial\Omega} P(x, y, z) dydz \text{。}$$

三式相加就是 Gauss 公式。

　　当$\boldsymbol{\Omega}$可分成有限块标准区域时，可添加辅助曲面（见图 14.3.15），将其分成一块块标准区域。如同讨论 Green 公式的情形一样，对每块标准区域应用 Gauss 公式，再把它们加起来。注意到如果一片曲面为两块不同标准区域的共同边界时，会出现沿它不同侧面的两个曲面积分，在相加时它们就会互相抵消，最后只留下的是沿$\partial\boldsymbol{\Omega}$的曲面积分。

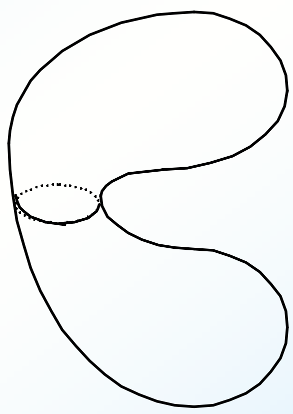

图 14.1.15

Gauss 公式也可以推广到具有有限个“洞”的二维复连通区域上去。如对图 14.3.16 所示的有一个“洞”的区域，用适当的曲面将它分割成两个二维单连通区域后分别应用 Gauss 公式，再相加，即可推出 Gauss 公式依然成立。注意，这时区域外面的边界还是取外侧，但内部的边界却取内侧。但相对于区域，它们事实上都是外侧。

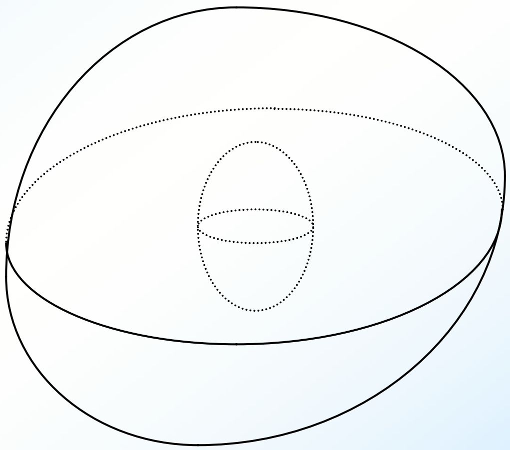

图14.3.16

Gauss 公式说明了在空间中一个区域Ω上的三重积分与沿其边界$\partial\Omega$的曲面积分间的内在关系，可视为 Green 公式的一个推广。与 Green 公式一样，Gauss 公式的一个直接应用就是可用沿区域Ω的边界的曲面积分来计算Ω的体积，具体的说就是

$$V=\iiint_{\Omega}dxdydz=\iint_{\partial\Omega}xdydz=\iint_{\partial\Omega}ydzdx=\iint_{\partial\Omega}zdxdy$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}xdydz+ydzdx+zdxdy,$$

其中$\partial\Omega$的定向为外侧。

例 14.3.6 用上述公式计算椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围椭球的体积。

解 椭球面的参数方程为

$x=a\sin\varphi\cos\theta,\ y=b\sin\varphi\sin\theta,\quad z=c\cos\varphi$，$0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi$，

于是

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}=ab\sin\varphi\cos\varphi\text{。}$$

由以上公式得到椭球的体积为

$$V=\iint_{\partial\Omega} zdxdy=\iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi\\0\le\varphi\le\pi}} c\cos\varphi\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}d\varphi d\theta$$

$$=abc\iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi\\0\le\varphi\le\pi}}\sin\varphi\cos^2\varphi d\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi d\varphi=\frac{4}{3}\pi abc\text{。}$$

例 14.3.7 求 $\iint\limits_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$，$\Sigma$ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，方向取外侧。

解 由 Gauss 公式并应用球面坐标变换得

$$\iint\limits_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = 3 \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \le a^2} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a} r^4 \sin\varphi \, dr = \frac{12}{5}\pi a^5 \text{。}$$

$y = h$

例 14.3.8 设某种流体的速度为 $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，求单位时间内流体流过曲面 Σ： $y = x^2 + z^2 \quad (0 \le y \le h)$ 的流量，其中 Σ 的方向取左侧。

解 流量的计算公式为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy \text{。}$$

由于 Σ 不是封闭曲面，但添加一片曲面

$$\sigma : y = h, \quad x^2 + z^2 \le h$$

后，$\Sigma + \sigma$ 就是封闭曲面，这里 σ 的方向取右侧。

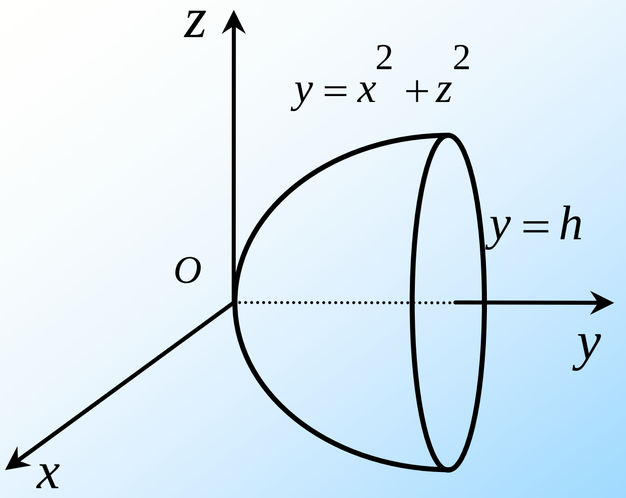

图14.3.17

$y = h$

记$\Sigma+\sigma$所围的区域为Ω，则由 Gauss 公式，得到

$$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy + \iint_{\sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

$$= \iiint_{\Omega} 3dxdydz = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{h}} rdr \int_{r^2}^{h} dy = \frac{3\pi}{2} h^2 ,$$

其中计算三重积分时利用了柱面坐标变换$z = r\cos\theta,\ x = r\sin\theta,\ y = y$。由于

$$\iint_{\sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint_{\sigma} ydzdx = \iint_{x^2+z^2\le h} hdzdx = \pi h^2 ,$$

所以

$$\Phi = \iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = \frac{3\pi}{2}h^2 - \pi h^2 = \frac{\pi}{2}h^2 。$$

Stokes 公式

设**Σ**为具有分段光滑边界的非封闭光滑双侧曲面。选定曲面的一侧，并如下规定**Σ**的边界∂**Σ**的一个正向：如果一个人保持与曲面选定一侧的法向量同向站立，当他沿∂**Σ**的这个方向行走时，曲面**Σ**总是在他左边。∂**Σ**的这个定向也称为**Σ**的诱导定向，这种定向方法称为**右手定则**。

定理 14.3.5（Stokes 公式） 设Σ为光滑曲面，其边界∂Σ为分段光滑闭曲线。若函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在Σ及其边界∂Σ上具有连续偏导数，则成立

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS,$$

其中∂Σ取诱导定向。

证 只证明$\boldsymbol{\Sigma}$可同时表为以下三种形式

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{(x,y,z) \mid z = z(x,y), \quad (x,y)\in \Sigma_{xy}\}\\ &= \{(x,y,z) \mid y = y(z,x), \quad (z,x)\in \Sigma_{zx}\}\\ &= \{(x,y,z) \mid x = x(y,z), \quad (y,z)\in \Sigma_{yz}\}\end{aligned}$$

的情形，其中$\boldsymbol{\Sigma}_{xy}$,$\boldsymbol{\Sigma}_{zx}$,$\boldsymbol{\Sigma}_{yz}$分别为$\boldsymbol{\Sigma}$在xy, zx, yz平面的投影（见图 14.3.18），这样的曲面称为标准曲面。

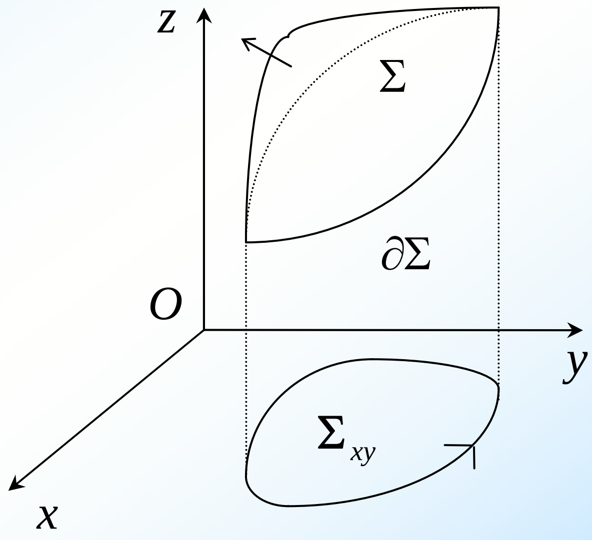

图14.3.18

不妨设$\boldsymbol{\Sigma}$的定向为上侧。利用曲线积分的计算公式，由$\boldsymbol{\Sigma}$的第一种表示易得

$$\int_{\partial\Sigma} P(x,y,z)dx = \int_{\partial\Sigma_{xy}} P(x,y,z(x,y))dx \text{，}$$

其中$\partial\boldsymbol{\Sigma}_{xy}$为$\boldsymbol{\Sigma}_{xy}$的正向边界。再对后积分应用 Green 公式，

$$\int_{\partial\Sigma_{xy}} P(x,y,z(x,y))dx = -\iint_{\Sigma_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P(x,y,z(x,y))dxdy$$

$$= -\iint_{\Sigma_{xy}} \left[\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z(x,y)) + \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z(x,y)) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right] dxdy \text{ 。}$$

注意到曲面取上侧，则$\boldsymbol{\Sigma}$的法向量的方向余弦为

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) \text{，}$$

因此$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}$。所以

$$\iint_{\Sigma_{xy}}\left[\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z(x,y))+\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z(x,y))\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right]dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right]dxdy=\iint_{\Sigma}\left[\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right]\cos\gamma\, dS$$

$$=\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\, dS-\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cos\gamma\, dS$$

$$=\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\, dS-\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\, dS=\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy-\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}dzdx\text{。}$$

结合这几式就得

$$\int_{\partial\Sigma}P(x,y,z)dx=\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy\text{。}$$

同理可得

$$\oint_{\partial\Sigma} Q(x,y,z)dy = \iint_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz，\quad \oint_{\partial\Sigma} R(x,y,z)dz = \iint_{\Sigma} \frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx。$$

三式相加即得到 Stokes 公式。

同理可得

$$\int_{\partial\Sigma} Q(x,y,z)dy = \iint_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z} dydz \text{，} \quad \int_{\partial\Sigma} R(x,y,z)dz = \iint_{\Sigma} \frac{\partial R}{\partial y} dydz - \frac{\partial R}{\partial x} dzdx \text{。}$$

三式相加即得到 Stokes 公式。

利用行列式记号，可以将 Stokes 公式写成

$$\int_{\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \text{。}$$

Stokes 定理说明了沿曲面**Σ**的曲面积分与沿其边界∂ **Σ**的曲线积分间的内在关系。它也是 Green 公式的一个自然推广。

例 14.3.9 计算 $I=\int_{L}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，其中 $\mathbf{L}$ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标平面所截三角形 $\mathbf{\Sigma}$ 的边界，若从 x 轴的正向看去，定向为逆时针方向。

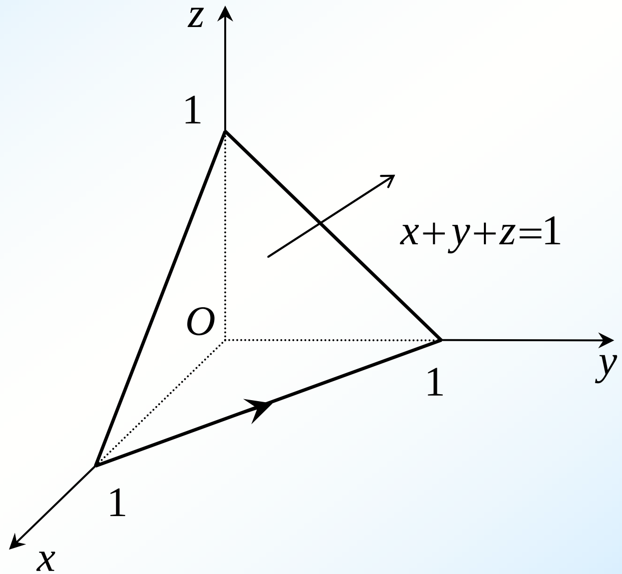

图14.3.19

解　由 Stokes 公式得到

$$I=\int_{L}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}dS$$

$$=-2\iint_{\Sigma}\left[(y+z)\cos\alpha+(x+z)\cos\beta+(x+y)\cos\gamma\right]dS\text{。}$$

由于**Σ**的方程为 $x+y+z=1$，定向为上侧，则易计算

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{。}$$

注意到在三角形**Σ**上成立 $x+y+z=1$，且**Σ**的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，就得到

$$I=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}dS=-2\text{。}$$

例 14.3.10 计算 $I=\int\limits_{L}(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$，其中 $\mathbf{L}$ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx\ (z\ge 0)$ 与圆柱面 $x^2+y^2=2rx\ \ (R>r>0)$ 的交线，从 z 轴的正向看去，是逆时针方向。

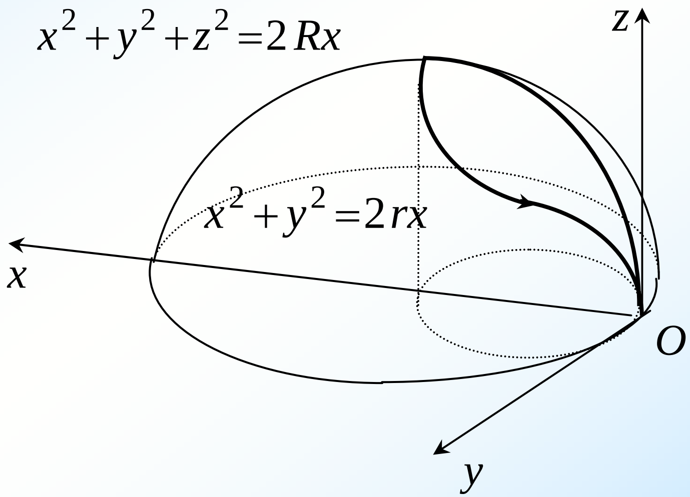

图14.3.20

解 记在球面$x^2+y^2+z^2=2Rx$上由**L**所围的曲面为**Σ**。由于**L**的定向，为应用Stokes定理取**Σ**的定向为上侧，所以其法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x-R}{R},\ \cos\beta=\frac{y}{R},\ \cos\gamma=\frac{z}{R}\text{。}$$

由Stokes定理得到

$$I=\int_{\mathbf{L}}(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2\end{vmatrix}dS$$

$$=2\iint_{\Sigma}\left((y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma\right)dS$$

$$=2\iint_{\Sigma}\left[(y-z)\frac{x-R}{R}+(z-x)\frac{y}{R}+(x-y)\frac{z}{R}\right]dS=2\left(\iint_{\Sigma}zdS-\iint_{\Sigma}ydS\right)\text{。}$$

由于曲面**Σ**关于xz平面对称，因此

$$\iint_{\Sigma} ydS = 0 \text{。}$$

而在上半球面$x^2+y^2+z^2=2Rx\ (z\geq 0)$上，$z=\sqrt{2Rx-x^2-y^2}$，所以在**Σ**上有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{(x-R)^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{R}{z} \text{。}$$

利用曲面积分的计算公式就得到

$$I=2\iint_{\Sigma} zdS=2\iint_{(x-r)^2+y^2\leq r^2} z\frac{R}{z}dxdy=2R\iint_{(x-r)^2+y^2\leq r^2} dxdy=2\pi r^2 R \text{。}$$