§4　闭区间上的连续函数

有界性定理

定理3.4.1　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上有界。

证　用反证法。

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，将 $[a,b]$ 等分为两个小区间 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 与 $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$，则 $f(x)$ 至少在其中之一上无界，把它记为 $[a_1,b_1]$；

再将闭区间 $[a_1,b_1]$ 与等分为两个小区间 $\left[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$ 与 $\left[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$，同样 $f(x)$ 至少在其中之一上无界，把它记为 $[a_2,b_2]$；

……

这样的步骤一直做下去，便得到一个闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$，$f(x)$在其中任何一个闭区间$[a_n,b_n]$上都是无界的。

根据闭区间套定理，存在唯一的实数ξ属于所有的闭区间$[a_n,b_n]$，并且

$$\xi=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n。$$

因为$\xi\in[a,b]$，而$f(x)$在点ξ连续，所以存在$\delta>0$，$M>0$，对于一切$x\in O(\xi,\delta)\cap[a,b]$，成立

$$|f(x)|\le M。$$

由于$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$，又可知道对于充分大的$n$，

$$[a_n,b_n]\subset O(\xi,\delta)\cap[a,b],$$

于是得到$f(x)$在这些闭区间$[a_n,b_n]$（n充分大）上有界的结论，从而产生矛盾。

证毕

开区间上的连续函数不一定是有界的。

例如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 上连续，但显然是无界的。

最值定理

定理3.4.2 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上必能取到最大值与最小值，即存在 ξ 和 $\eta\in[a,b]$，对于一切 $x\in[a,b]$ 成立

$$f(\xi)\le f(x)\le f(\eta)。$$

证 集合 $R_f=\{\,f(x)\,|\,x\in[a,b]\,\}$ 是有界数集，所以必有上确界与下确界，记

$$\alpha=\inf R_f，\quad \beta=\sup R_f。$$

由于对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $x\in[a,b]$，使得 $f(x)<\alpha+\varepsilon$。于是取 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$（$n=1,2,3,\cdots$）相应地得到数列 $\{x_n\}$，$x_n\in[a,b]$，满足

$$\alpha\le f(x_n)<\alpha+\frac{1}{n}。$$

因为$\{x_n\}$是有界数列，应用Bolzano-Weierstrass定理，存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$：

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi\text{，且}\xi \in [a,b]\text{。}$$

考虑不等式

$$\alpha \le f(x_{n_k}) < \alpha + \frac{1}{n_k}, \quad k = 1,2,3, \cdots,$$

令$k\to\infty$，由极限的夹逼性与$f(x)$在点ξ的连续性，得到

$$f(\xi) = \alpha\text{。}$$

这说明$f(x)$在$[a,b]$上取到最小值α，即$\alpha = \min R_f$。

同样可以证明存在$\eta \in [a,b]$，使得$f(\eta) = \beta = \max R_f$。

证毕

同样，开区间上的连续函数即使有界，也不一定能取到它的最大（小）值。例如，$f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 连续而且有界，因而有上、下确界

$$\alpha=\inf\{\, f(x)\,|\, x\in(0,1)\,\}=0\,,$$

$$\beta=\sup\{\, f(x)\,|\, x\in(0,1)\,\}=1\,,$$

但是 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上取不到 $\alpha=0$ 与 $\beta=1$。

零点存在定理

定理3.4.3 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，且$f(a)\cdot f(b)<0$，则一定存在$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$。

证 不失一般性，设$f(a)<0$，$f(b)>0$，定义集合V：

$$V=\{x \mid f(x)<0, x\in[a,b]\}。$$

集合V有界，非空，所以必有上确界。令

$$\xi=\sup V，$$

现证$\xi\in(a,b)$，且$f(\xi)=0$。

由于$f(x)$连续，$f(a)<0$，$\exists\,\delta_1>0$，$\forall x\in[a,a+\delta_1]$：$f(x)<0$；再由$f(b)>0$，$\exists\,\delta_2>0$，$\forall\,x\in(b-\delta_2,b)$：$f(x)>0$。于是可知

$$a+\delta_1\le\xi\le b-\delta_2，$$

即$\xi\in(a,b)$。

取 $x_n \in V (n=1,2,\cdots)$， $x_n \to \xi$ （$n \to \infty$），因 $f(x_n)<0$， 得到

$$f(\xi)=\lim_{n\to\infty} f(x_n) \le 0 \text{。}$$

若 $f(\xi)<0$， 由 $f(x)$ 在点ξ的连续性， $\exists \delta>0$， $\forall x \in O(\xi,\delta)$：

$$f(x)<0 \text{，}$$

这就与 $\xi=\sup V$ 产生矛盾。于是必然有

$$f(\xi)=0 \text{。}$$

证毕

例3.4.1 讨论多项式 $p(x)=2x^3-3x^2-3x+2$ 零点的位置。

解

x	-2	0	1	3
$p(x)$	-20	2	-2	20

$p(x)$ 的三个零点（或根）分别落在区间 $(-2,0)$，$(0,1)$ 与 $(1,3)$ 内。事实上，$p(x)=2(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-2)$，它的三个零点为 $x_1=-1$， $x_2=\frac{1}{2}$， $x_3=2$ 。

例3.4.2 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f([a,b]) \subset [a,b]$，则存在$\xi \in [a,b]$，$f(\xi)=\xi$（这样的ξ称为 $f(x)$ 的一个**不动点**。）

证 设 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(x)$ 在$[a,b]$上连续，由 $f([a,b]) \subset [a,b]$，可知 $g(a)\ge 0$，$g(b)\le 0$。

若 $g(a)=0$，则有 $\xi=a$；若 $g(b)=0$，则有 $\xi=b$；若 $g(a)>0$，$g(b)<0$，则由定理3.4.3，必存在$\xi \in (a,b)$，使得 $g(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$。

本例中闭区间$[a,b]$不能改为开区间。例如 $f(x)=\dfrac{x}{2}$ 在开区间 $(0,1)$ 上连续，且 $f((0,1))\subset(0,1)$，但 $f(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 中没有不动点。

中间值定理

定理3.4.4 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它一定能取到最大值 $M=\max\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$ 和最小值 $m=\min\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$ 之间的任何一个值。

证 由最值定理，存在 $\xi,\eta\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=m\,,\qquad f(\eta)=M\ 。$$

不妨设 $\xi<\eta$，对任何一个中间值 $C,\ m<C<M$，考察辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-C\ 。$$

因为 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[\xi,\eta]$ 上连续，$\varphi(\xi)=f(\xi)-C<0$，$\varphi(\eta)=f(\eta)-C>0$，由零点存在定理，必有 $\varsigma\in(\xi,\eta)$，使得

$$\varphi(\varsigma)=0\,,\quad \text{即 } f(\varsigma)=C\ 。$$

证毕

中间值定理

定理3.4.4 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它一定能取到最大值 $M=\max\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$ 和最小值 $m=\min\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$ 之间的任何一个值。

证 由最值定理，存在 $\xi,\eta\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=m\,,\qquad f(\eta)=M\ 。$$

不妨设 $\xi<\eta$，对任何一个中间值 $C,\ m<C<M$，考察辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-C\ 。$$

因为 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[\xi,\eta]$ 上连续，$\varphi(\xi)=f(\xi)-C<0$，$\varphi(\eta)=f(\eta)-C>0$，由零点存在定理，必有 $\varsigma\in(\xi,\eta)$，使得

$$\varphi(\varsigma)=0\,,\quad 即\ f(\varsigma)=C\ 。$$

证毕

推论 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，m是最小值，M是最大值，则 $f(x)$ 的值域是闭区间

$$R_f=[m.M]\ 。$$

一致连续概念

设区间 X 表示任意一种有限或无限的区间，如闭区间$[a,b]$，开区间(a,b)、$(a,+\infty)$、$(-\infty,b)$、$(-\infty,+\infty)$，半开半闭区间$[a,b)$、$(a,b]$、$(-\infty,b]$、$[a,+\infty)$等等。

定义3.4.1 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上定义，若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，只要x'，$x''\in X$ 满足$|x'-x''|<\delta$，就成立$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上**一致连续**。

一致连续概念

设区间 X 表示任意一种有限或无限的区间，如闭区间$[a,b]$，开区间(a,b)、$(a,+\infty)$、$(-\infty,b)$、$(-\infty,+\infty)$，半开半闭区间$[a,b)$、$(a,b]$、$(-\infty,b]$、$[a,+\infty)$等等。

定义3.4.1 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上定义，若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，只要x'，$x''\in X$ 满足$|x'-x''|<\delta$，就成立$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上**一致连续**。

在上面定义中，若固定 $x''=x_0\in X$，就得到 $f(x)$ 在点 x_0 的连续性。由于 x_0 可以是 X 中的任意一点，于是得到

$f(x)$ 在区间 X 上一致连续$\Rightarrow f(x)$ 在区间 X 上连续。

至于反向的命题，就不一定成立。

例3.4.3 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续。

证 由不等式

$$\left|\sin x'-\sin x''\right|=2\left|\cos\frac{x'+x''}{2}\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\le|x'-x''|,$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则对于任意两点 x'， $x''\in(-\infty,+\infty)$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就一定成立

$$\left|\sin x'-\sin x''\right|\le|x'-x''|<\delta=\varepsilon。$$

由定义， $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是一致连续的。

例 3.4.4 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 连续，但非一致连续。

证 对于任意给定的 $\varepsilon, 0<\varepsilon<1$， 我们通过精确地解出 $\delta^*(x_0,\varepsilon)=\inf\limits_{x_0}\delta(x_0,\varepsilon)$，来说明不存在适用于整个区间 $(0,1)$ 的 $\delta(\varepsilon)>0$。

对任意 $x,x_0\in(0,1)$，关系式 $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$ 即为

$$\frac{1}{x_0}-\varepsilon<\frac{1}{x}<\frac{1}{x_0}+\varepsilon,$$

它等价于

$$\frac{x_0}{1+x_0\varepsilon}<x<\frac{x_0}{1-x_0\varepsilon},$$

即

$$\frac{-x_0^2\varepsilon}{1+x_0\varepsilon}<x-x_0<\frac{x_0^2\varepsilon}{1-x_0\varepsilon},$$

由此得到

$$\delta(x_0,\varepsilon)=\min\left\{\frac{x_0^2\varepsilon}{1+x_0\varepsilon},\frac{x_0^2\varepsilon}{1-x_0\varepsilon}\right\}=\frac{x_0^2\varepsilon}{1+x_0\varepsilon}。$$

显然，这就是$\delta^*(x_0,\varepsilon)$。

但是当$x_0\to 0$时，有$\delta^*(x_0,\varepsilon)\to 0$，所以不存在对区间$(0,1)$中一切点都适用的$\delta(\varepsilon)>0$，因此$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上非一致连续。

对于大部分函数，要精确解出$\delta^*(x_0,\varepsilon)$往往非常困难，因而这种方法对于判断某一函数在某一区间上是否一致连续是不实用的。下面给出的定理则为判断非一致连续性提供了便利。

定理3.4.5 函数$f(x)$在区间X上定义，则$f(x)$在X上一致连续的充分必要条件是：对任意$\{x_n'\}$（$x_n'\in X$）和$\{x_n''\}$（$x_n''\in X$），只要满足$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，就成立$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$。

对于大部分函数，要精确解出$\delta^*(x_0,\varepsilon)$往往非常困难，因而这种方法对于判断某一函数在某一区间上是否一致连续是不实用的。下面给出的定理则为判断非一致连续性提供了便利。

定理3.4.5 函数$f(x)$在区间X上定义，则$f(x)$在X上一致连续的充分必要条件是：对任意$\{x_n'\}$ ($x_n'\in X$)和$\{x_n''\}$ ($x_n''\in X$)，只要满足$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，就成立$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$。

证 必要性：

函数$f(x)$在X上的一致连续性可表述为：$\forall\,\varepsilon>0$， $\exists\,\delta>0$，$\forall\, x',x''\in X(|x'-x''|<\delta)$：$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

对上述的$\delta>0$，由$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，可知$\exists N$，$\forall n>N$：$|x_n'-x_n''|<\delta$，从而得到

$$|f(x_n')-f(x_n'')|<\varepsilon,$$

这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$。

充分性：采用反证法。

函数 $f(x)$ 在 X 上的非一致连续性可表述为：$\exists\, \varepsilon_0 > 0$， $\forall\, \delta > 0$，$\exists\, x'$，$x'' \in X$（$\left| x' - x'' \right| < \delta$）：$\left| f(x_n') - f(x_n'') \right| \geq \varepsilon_0$。

取 $\delta_n = \dfrac{1}{n}$（$n = 1,2,3,\cdots$），于是存在 x_n'，$x_n'' \in X$，满足

$$\left| x_n' - x_n'' \right| < \frac{1}{n}, \quad \left| f(x_n') - f(x_n'') \right| \geq \varepsilon_0 \text{。}$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = 0$，但$\{f(x_n') - f(x_n'')\}$不可能收敛于 0，这就产生矛盾。

证毕

对例3.4.4，只要取$x_n'=\dfrac{1}{2n}$，$x_n''=\dfrac{1}{n}$，就有$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，但

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n')-f(x_n'')\right)=\lim_{n\to\infty}(2n-2)=\infty,$$

由定理3.4.5可知$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$非一致连续。

但是若将区间$(0,1)$换成$[\eta,1)$，$\eta>0$，则$f(x)=\dfrac{1}{x}$就在$[\eta,1)$上一致连续。这是因为

$$\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{|x'-x''|}{x'x''}\le\frac{|x'-x''|}{\eta^2},$$

对于任意给定的$\varepsilon>0$，只要取$\delta=\eta^2\varepsilon>0$即可。

例3.4.5 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续，但是在 $[0,A]$ 上一致连续（A为任意有限正数）

证 取 $x_n'=\sqrt{n+1}$， $x_n''=\sqrt{n}$ （ $n=1,2,3,\cdots$ ）， 于是

$$\lim_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0\text{，}$$

但是 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=1$， 由定理3.4.5可知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续。

当区间限制在 $[0,A]$ 时，有

$$|x'^2-x''^2| = |(x'+x'')(x'-x'')|\le 2A|x'-x''|\text{，}$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$， 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2A}>0$， 对任意 x'， $x''\in[0,A]$， 只要 $|x'-x''|<\delta$， 就成立 $|x'^2-x''^2|<\varepsilon$， 即 $f(x)=x^2$ 在 $[0,A]$ 上一致连续。

通过上面几个例子可以知道，长度无限的区间，如$[a,+\infty)$上的连续函数不一定一致连续；长度有限的开区间(a,b)上的连续函数也不一定一致连续。但是对于长度有限的闭区间$[a,b]$上的连续函数，我们有下面的著名定理：

通过上面几个例子可以知道，长度无限的区间，如$[a,+\infty)$上的连续函数不一定一致连续；长度有限的开区间(a,b)上的连续函数也不一定一致连续。但是对于长度有限的闭区间$[a,b]$上的连续函数，我们有下面的著名定理：

定理3.4.6 （Cantor定理） 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则它在$[a,b]$上一致连续。

证 采用反证法。

假设$f(x)$在$[a,b]$上非一致连续，可知存在$\varepsilon_0>0$及两列点列$\{x_n'\}$和$\{x_n''\}$，x_n'，$x_n''\in[a,b]$，满足

$$|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}，\quad 且\,|f(x_n')-f(x_n'')|\ge\varepsilon_0\quad(n=1,2,3,\cdots)。$$

因为$\{x_n'\}$有界，由Bolzano-Weierstrass定理，存在收敛子列$\{x_{n_k}'\}$:

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}'=\xi，\quad \xi\in[a,b]。$$

在点列$\{x_n''\}$中取子列$\{x_{n_k}''\}$，其下标与$\{x_{n_k}'\}$下标相同，则由$|x_{n_k}' - x_{n_k}''| < \dfrac{1}{n_k}$，$k = 1,2,3,\cdots$，又得到

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}'' = \lim_{k\to\infty}[x_{n_k}' + (x_{n_k}'' - x_{n_k}')] = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}' = \xi \text{。}$$

由于函数$f(x)$在点ξ连续，因而

$$\lim_{k\to\infty} f(x_n') = \lim_{k\to\infty} f(x_n'') = f(\xi)\text{，}$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}\big(f(x_n') - f(x_n'')\big) = 0\text{，}$$

这与$|f(x_n') - f(x_n'')| \ge \varepsilon_0$产生矛盾，从而得到$f(x)$在$[a,b]$上的一致连续性结论。

证毕

有限开区间(a,b)上的连续函数$f(x)$不一定一致连续。那么要具备怎样的条件，才能保证它在(a,b)上一致连续呢？

定理3.4.7 函数$f(x)$在有限开区间(a,b)连续，则$f(x)$在(a,b)上一致连续的充分必要条件是：$f(a+)$与$f(b-)$存在。

证 充分性：

设$f(a+)=A$， $f(b-)=B$，定义函数$\tilde{f}(x)$：

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} A, & x=a, \\ f(x), & a<x<b, \\ B, & x=b, \end{cases}$$

则$\tilde{f}(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数。

由Cantor定理，$\tilde{f}(x)$在$[a,b]$上一致连续。显然，对于一致连续的函数，当定义域缩小时，其一致连续性仍然保持。于是$\tilde{f}(x)$在开区间(a,b)上也是一致连续的，这就说明$f(x)$在(a,b)上一致连续。

必要性：设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上一致连续，则 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，$\forall\ x'$，$x''\in(a,b)$ （$|x'-x''|<\delta$）：

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon。$$

任意选取数列 $\{x_n\}$， $x_n\in(a,b)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 。因 $\{x_n\}$ 是基本数列，对于上述 $\delta>0$， $\exists N$， $\forall n,m>N$： $|x_n-x_m|<\delta$，从而

$$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon。$$

这说明了函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 也是基本数列，因而必定收敛。

由定理3.1.5’，可知 $f(a+)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)$ 存在。

同理可以证明 $f(b-)=\lim\limits_{x\to b-}f(x)$ 存在。

证毕

必要性：设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上一致连续，则 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，$\forall\ x'$，$x'' \in (a,b)$ （$|x' - x''| < \delta$）：

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon 。$$

任意选取数列 $\{x_n\}$，$x_n \in (a,b)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。因 $\{x_n\}$ 是基本数列，对于上述 $\delta > 0$，$\exists N$，$\forall n,m > N$：$|x_n - x_m| < \delta$，从而

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon 。$$

这说明了函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 也是基本数列，因而必定收敛。

由定理3. 1. 5’，可知 $f(a+) = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$ 存在。

同理可以证明 $f(b-) = \lim\limits_{x\to b-} f(x)$ 存在。

证毕

注意：定理3. 4. 7不适用于无限开区间的情况。例如：$f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是一致连续的，但 $f(-\infty)$ 与 $f(+\infty)$ 都不存在。

注

1. 本节中给出的5个定理：有界性定理、最值定理、零点存在定理、中间值定理、Cantor定理（即一致连续定理），是闭区间上连续函数最重要的分析性质，必须牢记并熟练掌握。

2. 在证明这5个定理时，分别采用了确界存在定理、闭区间套定理、Bolzano-Weierstrass定理和Cauchy收敛原理。 事实上，由于实数系的5个基本定理是等价的，所以在理论上，可以采用从实数系的连续性到实数系的完备性中的任何一个定理，来证明上述的闭区间上连续函数的任何一个性质，只是证明的难度稍有差别罢了。