首届全国大学生数学竞赛决赛试卷

（数学类，2010）

一、　填空题

(1) 设$\beta>\alpha>0$，则$\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx=$______________.

(2) 若关于x的方程$kx+\dfrac{1}{x^2}=1(k>0)$在区间$(0,+\infty)$内有惟一实数解，则常数$k=$______________.

(3) 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续.由积分中值公式有$\int_a^x f(t)dt=(x-a)f(\xi)$ $(a\le\xi\le x<b)$.若导数$f_+'(a)$存在且非零，则$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\xi-a}{x-a}$的值等于______________.

(4) 设$(\vec{a}\times\vec{b})\bullet\vec{c}=6$，则$\left((\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\right)\bullet(\vec{a}+\vec{c})=$______________.

二、设$f(x)$在$(-1,1)$内有定义，在$x=0$处可导，且$f(0)=0$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)=\dfrac{f'(0)}{2}$.

三、设$f(x)$在$[0,\infty)$上一致连续，且对于固定的$x\in[0,\infty)$,当自然数$n\to\infty$时$f(x+n)\to 0$.

证明: 函数序列$\{f(x+n)$: $n=1,2,\cdots\}$在$[0,1]$上一致收敛于0.

四、设$D=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$，$f(x,y)$在D内连续，$g(x,y)$在D内连续有界，且满足条件：(1) 当$x^2+y^2\to1$时，$f(x,y)\to+\infty$；

(2) 在D中f与g有二阶偏导数，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^f$，$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}\ge e^g$.

证明：$f(x,y)\ge g(x,y)$ 在D内处处成立.

五、设 $R=\{(x,y):0\le x\le1;0\le y\le1\}$

$$R_\varepsilon=\{(x,y):0\le x\le1-\varepsilon;0\le y\le1-\varepsilon\}.$$

考虑积分$I=\iint_R\dfrac{dxdy}{1-xy}$，$I_\varepsilon=\iint_{R_\varepsilon}\dfrac{dxdy}{1-xy}$，定义 $I=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}I_\varepsilon$.

（1） 证明$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$；

（2）利用变量替换：$\begin{cases} u=\frac{1}{2}(x+y) \\ v=\frac{1}{2}(y-x) \end{cases}$ 计算积分 I 的值，并由此推出$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

六、已知两直线的方程：$L: x=y=z$，$L': \frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-b}{1}$.（1）问：参数$a,b$满足什么条件时，$L$与$L'$是异面直线？

（2）当L与L'不重合时，求L'绕L旋转所生成的旋转面π的方程，并指出曲面π的类型.

七、设A,B均为n阶半正定实对称矩阵，且满足$n-1\le \operatorname{rank} A\le n$. 证明: 存在实可逆矩阵$C$使得$C^TAC$和$C^TBC$均为对角阵.

八、设V是复数域$\mathbb{C}$上的n维线性空间，$f_j: V\to\mathbb{C}$（$j=1,2$）是非零的线性函数, 且线性无关.

证明: 任意的$\alpha\in V$都可表为$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$,使得

$$f_1(\alpha)=f_1(\alpha_2),\quad f_2(\alpha)=f_2(\alpha_1).$$