2008 年复旦大学数学竞赛参考解答
（数学分析部分）

1．数列$\{a_n\}$满足$0<a_n\le a_{2n}+a_{2n+1}$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散。

解：令$b_1=a_1$，$b_2=a_2+a_3$，$b_3=a_4+a_5+a_6+a_7$，$b_n=a_{2^{n-1}}+a_{2^{n-1}+1}+\cdots+a_{2^n-1}$，则数列$\{b_n\}$单调增加。

2．设$-1<a_0<1$，$a_n=\sqrt{\dfrac{1+a_{n-1}}{2}}\quad(n>0)$，问极限 $\lim\limits_{n\to\infty}4^n(1-a_n)$是否存在？存在的话，求出极限值。

解：令 $a_0=\cos\theta,-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，则

$$a_1=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\cos\frac{\theta}{2}，\quad\cdots，\quad a_n=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}}{2}}=\cos\frac{\theta}{2^n}\text{。}$$

3．计算 Fibonacci 数列的通项a_n：$a_1=1,\ a_2=1,\quad a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\ (n\ge 2)$。

解：设$F(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，则$xF(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n$，$x^2F(x)=\sum\limits_{n=3}^{\infty}a_{n-2}x^n$，由此可得到$(1-x-x^2)F(x)=x$，求$F(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$幂级数展开中$x^n$的系数。答案为

$$a_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5}\text{。}$$

4．设$P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$，证明：$P_n(x)P_{n+1}(x)$有唯一实根。

解：$\lim\limits_{x\to\pm\infty}P_{2n}(x)=+\infty$，所以$P_{2n}(x)$有最小值。设$x_0$是最小值点，则$P_{2n}'(x_0)=P_{2n-1}(x_0)=0$，显然$x_0$不等于零。$P_{2n}(x)$的最小值为

$P_{2n}(x_0)=P_{2n-1}(x_0)+\dfrac{x_0^{2n}}{(2n)!}>0$。由于$P_{2n+1}'(x)=P_{2n}(x)>0$，可知$P_{2n+1}(x)$严格单调增加，所以$P_{2n+1}(x)$有唯一实根。

5．(1) 求 $I(\alpha)=\int_0^1|\alpha x-1|dx$ 关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 的最小值。

（2）设 $\int_0^1 f(x)dx=1$，$\int_0^1 xf(x)dx=0$，证明：$\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|\geq\sqrt{2}+1$。

解：（1）的答案为 $\sqrt{2}-1$ 。（2）由 $\int_0^1 f(x)dx=1$，$\int_0^1 xf(x)dx=0$，得到 $\int_0^1(\alpha x-1)f(x)dx=-1$ ，于是有 $1\leq\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|\cdot\int_0^1|\alpha x-1|dx$ 。

6．计算二重积分：$\iint_D\dfrac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}dxdy$，其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域。

解：令 $\begin{cases}u=x+y\\ v=x\end{cases}$，则 $\iint_D\dfrac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}dxdy=\iint_{D'}\dfrac{u\ln\left(\dfrac{u}{v}\right)}{\sqrt{1-u}}dudv$，其中 D' 由直线 $y=x,y=0,x=1$ 围成，再利用 $\int_0^u\ln vdv=u\ln u-u$ 。

7． $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^1\dfrac{f(x)}{1+n^2x^2}dx$，需要证明。

解：答案为 $\dfrac{\pi}{2}f(0)$。$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(0<x<\delta):|f(x)-f(0)|<\varepsilon$。

$$\left|n\int_0^1\frac{f(x)}{1+n^2x^2}dx-n\int_0^1\frac{f(0)}{1+n^2x^2}dx\right|\leq n\int_0^\delta\frac{|f(x)-f(0)|}{1+n^2x^2}dx+n\int_\delta^1\frac{|f(x)-f(0)|}{1+n^2x^2}dx,$$

右端第一项小于 $\dfrac{\pi}{2}\varepsilon$，第二项随 n 趋于零。

8．求 $x\to1-$ 时，与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量。

解：
$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}dt\leq\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}\leq1+\int_0^{+\infty}x^{t^2}dt,$$

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}dt=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty}x^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}\text{。}$$