# 首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷

## （数学类，2009）

考试形式：闭卷　　考试时间：120 分钟　　满分：100 分.

| 题　号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满　分 | 15 | 20 | 15 | 10 | 10 | 15 | 15 | 100 |
| 得　分 | | | | | | | | |

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.

2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.

专业：

年级：

所在院校：

身份证号：

姓名：

密　封　线

| 得　分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

一、（15 分）求经过三平行直线

$L_1 : x = y = z$， $L_2 : x-1 = y = z+1$， $L_3 : x = y+1 = z-1$

的圆柱面的方程.

| | |
|---|---|
| 得　分 | |
| 评阅人 | |

二、（20 分）设$C^{n\times n}$是$n\times n$复矩阵全体在通常的运算下所构成的复数域$C$上的线性空间，$F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$.

（1）假设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，若$AF=FA$，证明：

$$A=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E\ .$$

（2）求$C^{n\times n}$的子空间$C(F)=\left\{X\in C^{n\times n}\mid FX=XF\right\}$的维数.

姓名：________ 身份证号：________ 所在院校：________ 年级：________ 专业：________

密　封　线

| 得　分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

三、（15 分）假设$V$是复数域$C$上$n$维线性空间（$n>0$），$f,g$是$V$上的线性变换.如果 $fg-gf=f$，证明：$f$的特征值都是0，且 $f,g$ 有公共特征向量.

| 得　分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

四、（10 分）设$\{f_n(x)\}$是定义在$[a,b]$上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛，并在$[a,b]$上满足$|f_n'(x)|\le M$.（1）证明$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛；（2）记$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$，问$f(x)$是否一定在$[a,b]$上处处可导，为什么?

| 得　分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

五、（10 分）设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3 \mathrm{d}t$，　证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$发散.

姓名：________ 身份证号：________ 所在院校：________ 年级：________ 专业：________

密 封 线

| | |
|---|---|
| 得　分 | |
| 评阅人 | |

六、（15 分）$f(x,y)$ 是 $\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\right\}$ 上二次连续可微函数，满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2y^2$，计算积分

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

| 得　分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

七、（15 分）假设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，在 $(0,\ 1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,\ f(0))$，与点 $B(1,\ f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,\ f(c))$，其中 $0<c<1$. 证明：在 $(0,\ 1)$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $f''(\xi)=0$.