2008 年复旦大学数学竞赛试题
（数学分析部分试题）

1．数列$\{a_n\}$满足$0 < a_n \le a_{2n} + a_{2n+1}$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

2．设$-1 < a_0 < 1$，$a_n = \sqrt{\dfrac{1+a_{n-1}}{2}}$ $(n>0)$，问极限 $\lim_{n\to\infty} 4^n(1-a_n)$是否存在？存在的话，求出极限值。

3．计算 Fibonacci 数列的通项a_n： $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\ (n \ge 2)$。

4．设$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$，证明：$P_n(x)P_{n+1}(x)$有唯一实根。

5．(1) 求$I(\alpha) = \int_0^1 |\alpha x - 1| dx$关于$\alpha \in [0,+\infty)$的最小值。

（2）设$\int_0^1 f(x)dx = 1$，$\int_0^1 xf(x)dx = 0$，证明：$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \ge \sqrt{2} + 1$。

6．计算二重积分：$\iint_D \dfrac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} dxdy$，其中区域$D$由直线$x+y=1$与两坐标轴所围三角形区域。

7． $f(x)$在$[0,1]$上连续，求极限：$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \dfrac{f(x)}{1+n^2x^2}dx$ (需要证明)。

8．求$x \to 1-$ 时，与$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$等价的无穷大量。