

首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷

(非数学类, 2009)

考试形式: 闭卷 考试时间: 120 分钟 满分: 100 分.

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
满分	20	5	15	15	10	10	15	10	100
得分									

注意: 1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2、密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

得分	
评阅人	

一、 填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

(1) 计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} dx dy =$ _____, 其中

区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且满足

$$f(x) = 3x^2 - \int_0^2 f(x) dx - 2,$$

则 $f(x) =$ _____.

(3) 曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$ 平行平面 $2x + 2y - z = 0$ 的切平面方程是

_____.

(4) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$ 确定, 其中 f 具有二阶导数,

且 $f' \neq 1$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

专业: _____

年级: _____

所在院校: _____

身份证号: _____

姓名: _____

线 封 密

得 分	
评阅人	

二、(5分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}}$, 其中 n 是给定的正整数.

得 分	
评阅人	

三、(15分) 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, A 为常数, 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

续性.

姓名：_____ 身份证号：_____ 所在院校：_____ 年级：_____ 专业：_____

线
封
密

得 分	
评阅人	

四、(15分) 已知平面区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$,

L 为 D 的正向边界, 试证:

$$(1) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx ;$$

$$(2) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \geq \frac{5}{2} \pi^2 .$$

得 分	
评阅人	

五、(10分) 已知

$$y_1 = x e^x + e^{2x} , \quad y_2 = x e^x + e^{-x} , \quad y_3 = x e^x + e^{2x} - e^{-x}$$

是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解, 试求此微分方程.

得 分	
评阅人	

六、(10分) 设抛物线 $y = ax^2 + bx + 2\ln c$ 过原点, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $y \geq 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a, b, c , 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

姓名：_____ 身份证号：_____ 所在院校：_____ 年级：_____ 专业：_____

密 封 线

得 分	
评阅人	

七、(15分) 已知 $u_n(x)$ 满足

$$u_n'(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x \quad (n=1, 2, \dots),$$

且 $u_n(1) = \frac{e}{n}$, 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 之和.

得 分	
评阅人	

八、(10分) 求 $x \rightarrow 1^-$ 时, 与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.