数学分析课程中的否定命题

陈 纪 修
复旦大学数学科学学院

数学分析课程中证明定理或解答问题时，随时会遇到一个命题的否定命题的概念。在课程中典型地使用否定命题进行证明的定理就有：关于闭区间上的连续函数一致连续的 Cantor 定理；函数序列与函数项级数一致收敛的 Dini 定理；含参变量反常积分一致收敛的 Dini 定理，等。如何正确地写出一个命题的否定命题的数学表述，如何证明一个否定命题，或如何利用否定命题的数学表述来证明其他命题，是数学分析课程中很重要的一个内容，也是教学中的一个难点。学生在这方面的能力培养单靠以上几个定理的学习是远远不够的，在教学中我们有意识地在不同章节通过具体实例来讲授如何证明否定命题，如何在证明中应用否定命题的方法，对提高学生的逻辑思维与论证推理能力起到了很好的效果。

1．数列的收敛与发散

例 1 若有界数列 $\{x_n\}$ 不收敛，则必存在两个子列 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 与 $\{x_{n_k^{(2)}}\}$ 收敛于不同的极限，即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^{(1)}}=a$， $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^{(2)}}=b$， $a\neq b$。

证 因为 $\{x_n\}$ 是有界数列，由 Bolzano-Weierstrass 定理，可知存在 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^{(1)}}=a$。

由于 $\{x_n\}$ 不收敛，当然 $\{x_n\}$ 不收敛于 a。$\{x_n\}$ 收敛于 a 的数学表述为：

$$\forall\varepsilon>0，\ \exists N\in N^+，\ \forall n>N：\ |x_n-a|<\varepsilon。$$

于是可知 $\{x_n\}$ 不收敛于 a 的数学表述为：

$$\exists\varepsilon_0>0，\ \forall N\in N^+，\ \exists n>N：\ |x_n-a|\geq\varepsilon_0。$$

取 $N_1=1$，$\exists m_1>N_1$：$|x_{m_1}-a|\geq\varepsilon_0$，

取 $N_2=m_1$，$\exists m_2>N_2$：$|x_{m_2}-a|\geq\varepsilon_0$，

……,

取 $N_k=m_{k-1}$，$\exists m_k>N_k$：$|x_{m_k}-a|\geq\varepsilon_0$，

……,

于是得到 $\{x_n\}$ 的又一子列 $\{x_{m_k}\}$，它也是有界数列，再由 Bolzano-Weierstrass 定理，可知存在 $\{x_{m_k}\}$ 的一个收敛子列 $\{x_{n_k^{(2)}}\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^{(2)}}=b$。显然 $a\neq b$。

例 2 若数列{ x_n }无界，但非无穷大量，则必存在两个子列{ $x_{n_k^{(1)}}$ }与{ $x_{n_k^{(2)}}$ }，其中 { $x_{n_k^{(1)}}$ } 是无穷大量，{ $x_{n_k^{(2)}}$ } 是收敛子列。

证 数列{ x_n }是无穷大量的数学表述为：

$$\forall G>0，\exists N，\forall n>N：|x_n|>G。$$

所以{ x_n }不是无穷大量的数学表述为：

$$\exists G_0>0，\forall N，\exists n>N：|x_n|\le G_0。$$

由此可知数列{ x_n }中有无穷多项满足 $|x_n|\le G_0$，于是从中可以取出数列{ x_n }的一个收敛子列{ x_{m_k} }。

数列{ x_n }有界的定义为：

$$\exists G_0>0，\forall n：|x_n|\le G_0。$$

所以数列{ x_n }无界可表述为：

$$\forall G>0，\exists n：|x_n|>G。$$

由此可知 $\forall G>0$，数列{ x_n }中必有无穷多项满足 $|x_n|>G$。

取 $G_1=1$，则 $\exists n_1$，使得 $|x_{n_1}|>G_1$，

取 $G_2=2$，则 $\exists n_2>n_1$，使得 $|x_{n_2}|>G_2$，

……，

取 $G_k=k$，则 $\exists n_k>n_{k-1}$，使得 $|x_{n_k}|>G_k$，

…….

记 $\{n_k\}=\{n_k^{(1)}\}$，$\{m_k\}=\{n_k^{(2)}\}$，则得到 { x_n } 的两个子列{ $x_{n_k^{(1)}}$ }与{ $x_{n_k^{(2)}}$ }，其中 { $x_{n_k^{(1)}}$ } 是无穷大量，{ $x_{n_k^{(2)}}$ } 是收敛子列。

2．函数的一致连续性

函数的一致连续是数学分析课程中的一个重要概念，也是教学中的一个难点。当要求学生判断函数在某一个区间上是否一致连续，或者要求学生证明函数在某一个区间上非一致连续时，学生往往感到束手无策。下面我们证明了函数在某一个区间上一致连续的一个充分必要条件，它对判断函数在某一个区间上是否

一致连续，或者证明函数在某一个区间上非一致连续有重要的应用。

定理 1 函数 $f(x)$ 在区间 X 上定义，则 $f(x)$ 在 X 上一致连续的充分必要条件是：对任意$\{x_n'\}$($x_n' \in X$)和$\{x_n''\}$($x_n'' \in X$)，只要满足$\lim_{n\to\infty}(x_n' - x_n'')=0$，就成立$\lim_{n\to\infty}(f(x_n') - f(x_n''))=0$。

证 必要性：略。

充分性：采用反证法。

函数 $f(x)$ 在 X 上一致连续的数学表述为：

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall\ x', x'' \in X(|x' - x''| < \delta)$：$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$。

函数 $f(x)$ 在 X 上的不一致连续的数学表述为：

$\exists\ \varepsilon_0 > 0$，$\forall \delta > 0$，$\exists\ x', x'' \in X\ (|x' - x''| < \delta)$：$|f(x_n') - f(x_n'')| \ge \varepsilon_0$。

取$\delta_n = \dfrac{1}{n}$（$n = 1,2,3,\cdots$），于是存在$x_n', x_n'' \in X$，满足

$$|x_n' - x_n''| < \frac{1}{n},\quad |f(x_n') - f(x_n'')| \ge \varepsilon_0。$$

显然，$\lim_{n\to\infty}(x_n' - x_n'')=0$，但$\{f(x_n') - f(x_n'')\}$不可能收敛于$0$，这就产生矛盾。

例 3 证明 $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$在$x \in (0,1)$不一致连续。

证 取$x_n' = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{1}{2}\pi}$，$x_n'' = \dfrac{1}{2n\pi}$，则有$\lim_{n\to\infty}(x_n' - x_n'')=0$，但

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n') - f(x_n''))=\lim_{n\to\infty}(1-0)=1,$$

由定理 1 可知 $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$在$(0,1)$不一致连续。

例 4 证明 $f(x) = x^2$ 在$[0,+\infty)$上不一致连续。

证 取$x_n' = \sqrt{n+1}$，$x_n'' = \sqrt{n}$（$n = 1,2,3,\cdots$），于是

$$\lim_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0,$$

但是$\lim_{n\to\infty}(f(x_n') - f(x_n''))=1$，由定理 1 可知 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上不一致连续。

函数序列（函数项级数）与含参变量积分的一致收敛性是数学分析课程中非常重要的内容，因为一致收敛性关系到两个极限运算（求导与积分本质上也是极

限运算）能否交换次序的问题，是数学系学生必须牢固掌握的基础知识。证明函数序列（函数项级数）与含参变量积分的一致收敛性可以利用定义或定理，但是证明函数序列（函数项级数）与含参变量积分的非一致收敛性却是教学中又一个难点（也是学生学习中的一个难点）。下面介绍我们如何在教学中利用否定命题来讲授关于非一致收敛性的证明。

3．函数序列的一致收敛性

关于函数序列的一致收敛性，我们首先有下述充分必要条件：

定理 2 设函数序列$\{S_n(x)\}$在集合D上点态收敛于$S(x)$，则$\{S_n(x)\}$在D上一致收敛于$S(x)$的充分必要条件是：对任意数列$\{x_n\}$，$x_n \in D$，成立

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_n(x_n)-S(x_n)\right)=0\text{。}$$

证 必要性：略。

充分性： 采用反证法，也就是证明：若$\{S_n(x)\}$在D上不一致收敛于$S(x)$，则一定能找到数列$\{x_n\}$，$x_n \in D$，使得

$$S_n(x_n)-S(x_n) \not\to 0\ （n\to\infty）\text{。}$$

命题"函数序列$\{S_n(x)\}$在D上一致收敛于$S(x)$"可以表述为

$$\forall\varepsilon>0，\exists N，\forall n>N，\forall x\in D：\left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon\text{。}$$

因此它的否定命题"$\{S_n(x)\}$在D上不一致收敛于$S(x)$"可以表述为：

$$\exists\varepsilon_0>0，\forall N，\exists n>N，\exists x\in D：\left|S_n(x)-S(x)\right|\ge\varepsilon_0\text{。}$$

于是，下述步骤可以依次进行：

取$N_1=1$，$\exists n_1>1$，$\exists\, x_{n_1}\in D$：$\left|S_{n_1}(x_{n_1})-S(x_{n_1})\right|\ge\varepsilon_0$，

取$N_2=n_1$，$\exists n_2>n_1$，$\exists\, x_{n_2}\in D$：$\left|S_{n_2}(x_{n_2})-S(x_{n_2})\right|\ge\varepsilon_0$，，

……

取$N_k=n_{k-1}$，$\exists\, n_k>n_{k-1}$，$\exists\, x_{n_k}\in D$：$\left|S_{n_k}(x_{n_k})-S(x_{n_k})\right|\ge\varepsilon_0$，

……。

对于$m\in N^+\setminus\{n_1,n_2,\cdots,n_k,\cdots\}$，可以任取$x_m\in D$，这样就得到数列$\{x_n\}$，$x_n\in D$，由于它的子列$\{x_{n_k}\}$使得

$$\left|S_{n_k}(x_{n_k})-S(x_{n_k})\right|\ge\varepsilon_0，$$

显然不可能成立

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_n(x_n)-S(x_n)\right)=0\text{。}$$

定理 2 常用于判断函数序列的不一致收敛。

例 5 设$S_n(x) = nx(1-x^2)^n$，证明$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上不一致收敛。

证 函数序列$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上点态收敛于$S(x)=0$。取$x_n=\dfrac{1}{n}\in[0,1]$，则

$$S_n(x_n)-S(x_n) = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \to 1 \quad（n\to\infty），$$

由定理 2 可知$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上不一致收敛。

例 6 设$S_n(x)=(\sin x)^{\frac{1}{n}}$，证明$\{S_n(x)\}$在$(0,\pi)$上不一致收敛。

证 函数序列$\{S_n(x)\}$在$(0,\pi)$上点态收敛于$S(x)=1$，取$x_n\in(0,\pi)$，使得$\sin x_n=\frac{1}{2^n}$，则

$$S_n(x_n)-S(x_n)=\frac{1}{2}-1 \not\to 0\ (n\to\infty),$$

由定理 2 可知$\{S_n(x)\}$在$(0,\pi)$上不一致收敛。

例 7 设$S_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$，证明$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛。

证 函数序列$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上点态收敛于$S(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，取$x_n=\frac{1}{n}$，则

$$S_n(\frac{1}{n})-S(\frac{1}{n})=\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)\sqrt{n} \not\to 0\ (n\to\infty),$$

由定理 2 可知$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛。

例 8 设$S_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$，证明$\{S_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上不一致收敛。

证 函数序列$\{S_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上点态收敛于$S(x)=e^x$。取$x_n=n$，则

$$S_n(x_n)-S(x_n)=2^n-e^n\to-\infty\quad (n\to\infty),$$

由定理 2 可知$\{S_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上不一致收敛。

4．函数项级数的一致收敛性

我们先来看一个例题：

例 9 证明：当$\alpha>1$，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x^{\alpha}e^{-nx}$关于$x\in[0,+\infty)$一致收敛；当$0<\alpha\le1$，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x^{\alpha}e^{-nx}$关于$x\in[0,+\infty)$不一致收敛。

证 关于第一个命题，我们先求级数通项的最大值。由

$$\left(x^{\alpha}e^{-nx}\right)'=\left(\alpha-nx\right)x^{\alpha-1}e^{-nx}=0,$$

得到最大值点$x=\frac{\alpha}{n}$，于是对一切$x\in[0,+\infty)$有

$$x^{\alpha}e^{-nx}\le\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha}e^{-\alpha}。$$

由于$\alpha>1$，可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha}e^{-\alpha}$收敛，由函数项级数一致收敛的 Weierstrass 判别法，可知$\sum_{n=1}^{\infty}x^{\alpha}e^{-nx}$关于$x\in[0,+\infty)$一致收敛。

但是关于第二个命题，学生容易犯如下的错误：

同样对级数的通项求最大值，得到最大值点$x=\frac{\alpha}{n}$，最大值为

$$\max_{x\in[0,+\infty)}\left\{x^{\alpha}e^{-nx}\right\}=\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha}e^{-\alpha}\quad。$$

由于$\alpha\le 1$，可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha}e^{-\alpha}$发散，由此得到$\sum_{n=1}^{\infty}x^{\alpha}e^{-nx}$关于$x\in[0,+\infty)$不一致收敛。

上面关于第二个命题的证明是错误的。为了得到正确的证明，我们需要关于函数项级数一致收敛的 Cauchy 收敛原理：

定理 3（函数项级数一致收敛的 Cauchy 收敛原理） 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$D$上一致收敛的充分必要条件是：对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N=N(\varepsilon)$，使

$$|\ u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_m(x)\ |<\varepsilon$$

对一切正整数$m>n>N$与一切$x\in D$成立。

由定理 3 可知：如果存在两列正整数数列$N'(n)\to+\infty$，$N''(n)\to+\infty$ $(N'(n)<N''(n))$和$x_n\in D$，使得当$n\to\infty$时，

$$\sum_{k=N'(n)+1}^{N''(n)}u_k(x_n)=u_{N'(n)+1}(x_n)+u_{N'(n)+2}(x_n)+\cdots+u_{N''(n)}(x_n)\not\to 0$$

则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$不满足 Cauchy 收敛原理的条件，因此$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$D$上不一致收敛。

例 9 第二个命题的证明

记 $u_n(x)=x^{\alpha}e^{-nx}$，注意到有不等式

$$\sum_{k=n+1}^{2n}u_k(x)=x^{\alpha}e^{-(n+1)x}+x^{\alpha}e^{-(n+2)x}+\cdots+x^{\alpha}e^{-2nx}\ge nx^{\alpha}e^{-2nx},$$

取$m=2n$与$x_n=\frac{1}{n}\in[0,+\infty)$，由于$\alpha\le 1$，于是有

$$\sum_{k=n+1}^{2n}u_k(x_n)\ge nx_n^{\alpha}e^{-2nx_n}\ge e^{-2},$$

即 $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x_n) \not\longrightarrow 0$（$n \to \infty$），所以 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\alpha} e^{-nx}$ $(0 \le \alpha \le 1)$ 关于 $x \in [0,+\infty)$ 不一致收敛。

例 10 证明函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-nx^2}$ 关于 $x \in \left[0,+\infty\right)$ 不一致收敛。

证 记 $u_n(x) = xe^{-nx^2}$，取 $m = 2n$ 与 $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \in [0,+\infty)$，则

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x_n) = x_n e^{-(n+1)x_n^2} + x_n e^{-(n+2)x_n^2} + \cdots + x_n e^{-2nx_n^2} > nx_n e^{-2nx_n^2}$$

$$= \sqrt{n} e^{-2} \to +\infty \ (n \to \infty),$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-nx^2}$ 关于 $[0,+\infty)$ 不一致收敛。

5．含参变量反常积分的一致收敛性

关于含参变量反常积分的一致收敛性，我们也有如下的 Cauchy 收敛原理：

定理 4（含参变量反常积分一致收敛的 Cauchy 收敛原理） 含参变量反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛的充要条件为：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在与 y 无关的正数 A_0，使得对于任意的 $A', A > A_0$，成立

$$\left| \int_A^{A'} f(x,y)dx \right| < \varepsilon, \quad y \in [c,d]。$$

由定理 4 可知：如果存在 $A_n' \to +\infty$， $A_n'' \to +\infty$， $y_n \in [c,d]$，使得

$$\int_{A_n'}^{A_n''} f(x,y_n)dx \not\longrightarrow 0,$$

则含参变量反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 不满足 Cauchy 收敛原理的条件，因此 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上不一致收敛。

例 11 证明 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin xy}{x} dx$ 关于 y 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛。

证 取 $A_n' = n\pi$， $A_n'' = \dfrac{3}{2}n\pi$， $y = y_n = \dfrac{1}{n}$，则

$$\left| \int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi} \frac{\sin xy_n}{x} dx \right| = \left| \int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi} \frac{\sin \frac{x}{n}}{x} dx \right| > \frac{1}{\frac{3}{2}n\pi} \left| \int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi} \sin \frac{x}{n} dx \right| = \frac{2}{3\pi},$$

所以 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x}} dx$ 关于 y 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛。

例 12 证明$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}dx$关于$\alpha$在$(0,+\infty)$上不一致收敛：

证 取$A_n'=\frac{n\pi}{4},A_n''=\frac{3n\pi}{4}$，$\alpha=\alpha_n=\frac{1}{n}$，则

$$\left|\int_{A_n'}^{A_n''}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}dx\right|=\int_{\frac{n\pi}{4}}^{\frac{3n\pi}{4}}\frac{x\sin\alpha_n x}{\alpha_n(1+x^2)}dx\ge\frac{\sqrt{2}n^2\pi^2}{16\left(1+(\frac{3n\pi}{4})^2\right)}>\frac{\sqrt{2}}{18},$$

所以$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}dx$关于$\alpha$在$(0,+\infty)$上不一致收敛。

例 13 证明$\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 xdx$关于$p$在$(0,+\infty)$上不一致收敛。

证 取$A_n'=\frac{1}{2n}$，$A_n''=\frac{1}{n}$，$p=p_n=\frac{1}{n}$，则

$$\left|\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}}x^{p_n-1}\ln^2 xdx\right|\ge\ln^2\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}-1}dx=n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}-\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}\right)\ln^2\frac{1}{n}\to+\infty\ \ (n\to\infty),$$

所以$\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 xdx$关于$p$在$(0,+\infty)$上不一致收敛。

例 14 证明$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin xdx$关于$\alpha$在$(0,+\infty)$上不一致收敛。

解 取$A_n'=n\pi,A_n''=(n+1)\pi$，$\alpha=\alpha_n=\frac{1}{n+1}$，则

$$\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-\alpha_n x}\sin xdx\right|\ge\left|e^{-\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin xdx\right|=2e^{-\pi},$$

所以$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin xdx$关于$\alpha$在$(0,+\infty)$上不一致收敛。

参考文献

[1] 《数学分析》(第二版，上、下册)陈纪修，於崇华，金路编著，高等教育出版社(2004)

[2] 《数学分析习题全解指南》(上、下册)陈纪修，徐惠平，周渊，金路，邱维元编著，高等教育出版社(2005)