第一讲 微积分思想的产生与发展历史

在微积分产生之前，数学发展处于初等数学时期。人类只能研究常量，而对于变量则束手无策。在几何上只能讨论三角形和圆，而对于一般曲线则无能为力。到了 17 世纪中叶，由于科学技术发展的需要，人们开始关注变量与一般曲线的研究。在力学上，人们关心如何根据路程函数去确定质点的瞬时速度，或者根据瞬时速度去求质点走过的路程。在几何上，人们希望找到求一般曲线的切线的方法，并计算一般曲线所围图形的面积。令人惊讶的是，不同领域的问题却归结为相同模式的数学问题：求因变量在某一时刻对自变量的变化率；因变量在一定时间过程中所积累的变化。前者导致了微分的概念；后者导致了积分的概念。两者都包含了极限与无穷小的思想。

1．极限、无穷小、微分、积分的思想在中国古代早已有之

公元前 4 世纪，中国古代思想家和哲学家**庄子**在《天下篇》中论述："至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一。"其中大一和小一就是无穷大和无穷小的概念。而"一尺之棰，日取其半，万世不竭。"更是道出了无限分割的极限思想。

公元 3 世纪，中国古代数学家**刘徽**首创的**割圆术**，即用无穷小分割求面积的方法，就是古代极限思想的深刻表现。他用圆内接正多边形的边长来逼近圆周，得到了

$$3.141024 < \pi < 3.142704 \quad ,$$

并深刻地指出："割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。"

我国南北朝时期的数学家**祖暅**（中国古代数学家祖冲之之子）发展了刘徽的思想，在求出球的体积的同时，得到了一个重要的结论（后人称之为“**祖暅原理**”)：“夫叠基成立积，缘幂势既同，则积不容异。”用现在的话来讲，一个几何体(“立积”)是由一系列很薄的小片(“基”)叠成的；若两个几何体相应的小片的截面积(“幂势”)都相同，那它们的体积(“积”)必然相等。

利用祖暅原理求球体的体积：取一个几何体为上半球体$\{x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0\}$；将圆柱体 $\{x^2+y^2\le R^2$，$0\le z\le R\}$减去（即挖去）倒立的圆锥$\{x^2+y^2\le z^2$， $0\le z\le R\}$视为另一个几何体。则对任意的$0\le z\le R$，过$(0,0,z)$点作水平截面，得到的截口面积相等， 都为$\pi\left(R^2-z^2\right)$，由此得到球体的体积为$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$。

2．十七世纪前微分学与积分学的发展历史

公元前 5 世纪，古希腊数学家**安提丰**（Antiphon）创立了“**穷竭法**”，认为圆内接正多边形当边数不断增加，最后多边形就与圆相合。公元前 2 世纪，古希腊数学家**阿基米德**（Archimedes）对“穷竭法”作出了巧妙的应用，他在《论抛物线求积法》中用“穷竭法”求抛物弓形的面积，他构造一系列三角形使它们的面积和不断接近抛物弓形的面积，这就是极限理论的最初形式。在《论球和柱体》一书中，阿基米德首先得到了球和球冠的表面积、球和球缺的体积的正确公式。阿基米德的著作代表了古希腊数学的顶峰。

1615 年，德国数学家**开普勒**（J. Kepler, 1571-1630）用无穷小微元来确定曲边形的面积与体积。他把圆看作边数无限多的多边形，圆

周上每一点看作是顶点在圆心高等于半径的极小等腰三角形的底，于是圆面积就等于圆周长与半径乘积之半。他把球看作面数无限多的多面体，球面上每一点看作是顶点在球心高等于半径的极小圆锥的底，于是球体积就等于球表面积与半径乘积之三分之一。他还用无穷小方法精确地计算出酒桶的体积，并写了《测量酒桶体积的新科学》，书中包含了 87 种不同的旋转体的体积计算。

开普勒最重要的贡献是提出了行星运行三大定律：（1）行星在椭圆轨道上绕太阳运动，太阳在此椭圆的一个焦点上。（2）从太阳到行星的向径在相等的时间内扫过相等的面积。（3）行星绕太阳公转周期的平方与其椭圆轨道的半长轴的立方成正比。可以说这是天文学上划时代的贡献，也是数学史上重要的里程碑。牛顿就是应用开普勒的行星运行三大定律，通过严格的数学推导，发现了万有引力定律。为了确定第二定律，Kepler 将椭圆中被扫过的那部分图形分割成许多小的“扇形”，并近似地将它们看成一个个小的三角形，运用了一些出色的技巧对它们的面积之和求极限，成功地计算出了所扫过的面积。在其卓有成效的工作中，已包含了现代定积分思想的雏形。

积分学的历史可追溯至古希腊，它跨越了二千多年历史。而微分学的历史相对要短得多，这是因为积分学研究的问题是静态的，而微分学研究的问题是动态的，它涉及到运动。直到 17 世纪，微分学才得到重大突破。微分学主要来源于两个问题的研究：曲线的切线问题与函数的极大、极小问题。法国数学家费尔马（P. Fermat, 1744-1825）在这两个问题上作出了主要贡献。费尔马在处理这两个问题时，都是

先对自变量取增量，再让增量趋于零，这就是微分学的本质所在。费尔马也在积分学方面做了许多工作，如求面积、体积、重心等问题。但可惜的是他没有发现微分学与积分学这两类问题之间的基本联系。

另一位已经走到了微积分基本定理的门口的是英国数学家**巴罗**（I. Barrow, 1630-1677），他是牛顿的老师，是剑桥大学卢卡斯讲座教授，后来他认为牛顿已经超过了他，就把这一讲座教授的位置让给了牛顿。他在《光学和几何学讲义》一书中，已经把求曲线的切线与求曲线下区域的面积问题联系了起来，也就是说，他把微分学和积分学的两个基本问题联系了起来。但可惜的是巴罗没有从一般概念的意义下进一步深入地研究它们。

3．牛顿和莱布尼兹对微积分学科的功绩

微积分学科的建立，归功于两位伟大的科学先驱：**牛顿**和**莱布尼兹**。关键在于他们认识到，过去一直分别研究的微分和积分这两个运算，是彼此互逆的两个过程，它们是由牛顿—莱布尼兹公式联系起来的。

1669 年英国大数学家牛顿（I. Newton, 1643-1727）提出微积分学说存在正反两个方面的运算，例如面积计算和切线斜率计算就是互逆的两种运算，即微分和积分互为逆运算，从而完成了微积分运算的决定性步骤。但由于种种原因，他决定不向外界公开他的数学成果，他的成果只是以手稿的形式在少数几个同事中传阅，而这一决定在以后给他带来了大麻烦。直到 1687 年，牛顿才出版了他的著作《自然哲学的数学原理》，在这个划时代的著作中，他陈述了他的伟大创造—

微积分，并应用微积分理论，从开普勒关于行星的三大定律导出了万有引力定律。牛顿还将微积分广泛应用于声学、光学、流体运动等学科，充分显示了微积分理论的巨大威力。

牛顿是人类历史上最伟大的数学家之一。英国著名诗人波普（Pope）是这样描述牛顿的：

自然和自然的规律
沉浸在一片混沌之中，
上帝说，生出牛顿，
一切都变得明朗。

牛顿本人却很谦虚："我不知道世间把我看成什么人，但是对我自己来说，就象一个海边玩耍的小孩，有时找到一块比较平滑的卵石或格外漂亮的贝壳，感到高兴，而在我面前是未被发现的真理的大海。"

德国数学家莱布尼兹(G. W. Leibniz, 1646-1716) 也致力于研究切线问题和面积问题，并探索两类问题之间的关系。他把有限量的运算与无穷小量的运算进行类比，创立了无穷小量求商法和求积法，即微分和积分运算。1684 年，他发表了论文《求极大值和极小值以及切线的新方法，对有理量和无理量都适用的，一种值得注意的演算》，两年后他又发表了他在积分学上的早期结果。

牛顿和莱布尼兹对微积分的研究都达到了同一目标，但两人的方法不同。牛顿发现最终结果比莱布尼兹早一些，但莱布尼兹发表自己的结论比牛顿早一些。关于谁是微积分的创始者，英国数学家与欧洲

大陆的数学家经历了一场旷日持久的论战，这场论战持续了 100 多年。

正是由于牛顿和莱布尼兹的功绩，微积分成为了一门独立的学科，求微分与求积分的问题，不再是孤立地进行处理了，而是有了统一的处理方法。虽然关于谁是微积分的创始者，英国数学家与欧洲大陆的数学家经历了 100 多年的论战，但公正的历史评价是不应该把发明微积分这一伟大的成就完全归功于一两个人的偶然的和不可思议的灵感，公正地说，微积分的产生历史，说明了这样一个真理：人类科技发展史上的任何一个进步，都是站在巨人的肩膀上取得的。牛顿说他就是站在巨人的肩膀上，在当时这个巨人已经形成，这个巨人包括了一大批微积分的先驱们，如：阿基米德、开普勒、费尔马、巴罗等数学家。

微积分的诞生具有划时代的意义，是数学史上的分水岭与转折点，是人类探索大自然的艰苦努力的一项伟大的成功，是人类思维的最伟大的成就之一。这个伟大发明所产生的新数学与旧数学有本质的区别：旧数学是关于常量的数学，新数学是关于变量的数学；旧数学是静态的，新数学是动态的；旧数学只涉及固定的和有限的量，新数学则包含了运动、变化和无限。

关于微积分的地位，**恩格斯**这样评论："在一切理论成就中，未必再有什么象 17 世纪下半叶微积分的发现那样被看作人类精神的最高胜利了。如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹的和唯一的功绩，那正是在这里。"

微积分诞生后，数学引来了一次空前的繁荣时期。18 世纪被称为数学史上的英雄世纪。数学家们把微积分应用于天文学、力学、光学、热学等各个领域，获得了丰硕的成果。在数学本身，他们把微积分作为工具，又发展出微分方程、微分几何、无穷级数等理论分支，大大扩展了数学研究的范围。

4．微积分严格理论体系的完善

微积分建立之后，出现了两个极不协调的情景；一方面是微积分广泛应用于各个领域，取得了辉煌的成就；另一方面是人们对于微积分的基本概念的合理性提出了强烈的质疑。19 世纪以前，无穷小量概念始终缺少一个严格的数学定义，因此导致了相当严重的混乱。1734 年英国哲学家红衣主教**贝克莱**（G. Berkeley, 1685-1753）对微积分基础的可靠性提出强烈质疑，从而引发了第二次数学危机。他认为微积分的发展包含了偷换假设的逻辑错误。例如对 $y=x^3$ 求导数（当时称为求流数），要先假设自变量有一个无穷小增量“0”，它不能为零，但在计算后半部，又要把这增量取为零：

$$\frac{(x+0)^3-x^3}{0}=3x^2+3x\cdot 0+0^2=3x^2。$$

所以他说：无论怎样看，牛顿的流数计算是不合逻辑的。

为了克服微积分运算在逻辑上的矛盾，为微积分学科建立严格的数学基础，数学家们又经历了长期而艰苦的努力。1750 年法国数学家**达朗贝尔**（J. R. d’Alembert, 1717-1783）用极限方法取代无穷小量方法；后来法国数学家**柯西**（L. Cauchy, 1780-1857)在达朗贝尔通俗的极限基础上，从变量和函数角度出发给出极限的定义，从而把微积

分的基础严格地奠定在极限概念之上。最后德国数学家**魏尔斯特拉斯**(K. Weierstrass, 1815-1897)用静态的$\varepsilon-\delta$语言来刻画动态的极限与连续概念，使极限的定义达到了最清晰最严密的程度，直到如今人们仍然在使用他的定义。

由于严格的极限理论的建立，而无穷小量可用极限的语言清楚地加以描述，这才解决了有关的逻辑困难。而且由于$\varepsilon-\delta$语言的建立，又使得微积分的发展如虎添翼。

极限概念严格化以后，接下来的事情就是要建立实数理论，因为极限概念需要以实数理论为前提。由于实数具有连续性，所以才能以实数系作为平台，在这个平台上展开微积分的理论。这方面的工作是由德国数学家**康托尔**(G. Cantor, 1845-1918)、**戴特金**(R. Dedekind, 1831-1916)等一批数学家完成的。

从以上介绍，可以知道微积分发展的历史轨迹是：

积分学—微分学—微积分学—极限理论—实数理论

但从数学分析课程来看，它的理论体系应该是：

实数理论—极限理论—微分学—积分学—微积分学