第五章　微分中值定理及其应用

习　题　5.1　微分中值定理

1.　设 $f_+'(x_0)>0$， $f_-'(x_0)<0$，证明 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点。

证　由 $f_+'(x_0)>0$，可知当 $\delta>0$ 足够小时，若 $0<x-x_0<\delta$，则 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$，于是 $f(x)-f(x_0)>0$；同理，由 $f_-'(x_0)<0$，可知当 $\delta>0$ 足够小时，若 $-\delta<x-x_0<0$，则 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$，于是也有 $f(x)-f(x_0)>0$。从而命题得证。

2．（Darboux 定理）设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导， $x_1,x_2\in(a,b)$。如果 $f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$，证明在 x_1 和 x_2 之间至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$。

证　显然 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1<x_2$。若 $f'(x_1)>0$，则 $f'(x_2)<0$，仿照习题 1 可证存在 $x_1<x_3<x_4<x_2$，使得 $f(x_1)<f(x_3)$， $f(x_2)<f(x_4)$，从而 x_1,x_2 都不是 $f(x)$ 的最大值点，于是 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 的最大值点 $\xi\in(x_1,x_2)$，并且成立 $f'(\xi)=0$。若 $f'(x_1)<0$，则 $f'(x_2)>0$，同样可证 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 的最小值点 $\xi\in(x_1,x_2)$，并且成立 $f'(\xi)=0$。

3．　举例说明 Lagrange 中值定理的任何一个条件不满足时，定理结论就有可能不成立。

解　$[-1,1]$ 上的符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 在 $x=0$ 不连续，所以 Lagrange 中值定理的条件不满足。而 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=1$，不存在 $\xi\in(-1,1),\ f'(\xi)=1$。

$[-1,1]$ 上的绝对值函数 $|x|$ 连续，但在 $x=0$ 不可微，所以 Lagrange 中值

定理的条件不满足。而$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=0$，但$\forall\xi\in(-1,1),\xi\neq0, f'(\xi)=\pm1\neq0$。

4. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可微。利用辅助函数

$$\psi(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}$$

证明 Lagrange 中值定理，并说明$\psi(x)$的几何意义。

证 显然$\psi(a)=\psi(b)=0$，并且满足 Rolle 定理条件。由 Rolle 定理，在(a,b)内存在一点ξ，使得

$$\psi'(\xi)=\begin{vmatrix} 1 & f'(\xi) & 0 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}=f'(\xi)(b-a)-[f(b)-f(a)]=0，$$

所以 Lagrange 中值定理成立。

几何意义：以$(x,f(x)),(a,f(a)),(b,f(b))$顶点的三角形如果顶点逆时针排列，则$\psi(x)$就是三角形面积的两倍，否则$-\psi(x)$就是三角形面积的两倍。

5. 设函数$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，证明(a,b)内存在一点ξ，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}。$$

证 令$F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}(x-a)-(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$，则$F(a)=F(b)=0$，由 Rolle 定理，在$(a,b)$内存在一点$\xi$，使得

$$F'(\xi)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}-(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}=0。$$

6. 设非线性函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，则在(a,b)上

至少存在一点η，满足

$$|f'(\eta)|>|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|,$$

并说明它的几何意义。

证 由于$f(x)$是非线性函数，所以在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$(\xi, f(\xi))$不在$(a, f(a)),(b, f(b))$的连线上。

假设$(\xi, f(\xi))$在$(a, f(a)),(b, f(b))$的连线的上方，则

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi},$$

利用 Lagrange 中值定理，存在$\xi_1\in(a,\xi),\xi_2\in(\xi,b),$ 使得

$$f'(\xi_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>f'(\xi_2),$$

所以$\max\{|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|\}>|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|$。当$(\xi, f(\xi))$在$(a, f(a)),(b, f(b))$的连线下方时同理可证。

几何意义：在$[a,b]$上连续、在(a,b)上可导的非线性函数，必定在某点切线斜率的绝对值大于$[a,b]$间割线斜率的绝对值。

7．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)$，其中$a\neq 0$为常数。

解 由 Lagrange 中值定理，$\dfrac{\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}}{\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}}=\dfrac{1}{1+\xi^2}$，其中$\xi$位于$\dfrac{a}{n+1}$与$\dfrac{a}{n}$之间。当$n\to\infty$时，$\dfrac{1}{1+\xi^2}$趋于1，所以

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{na}{n+1}\cdot\frac{\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)}{\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{na}{n+1}\cdot\frac{1}{1+\xi^2}\right)=a\text{。}$$

8． 用 Lagrange 公式证明不等式：

(1) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$;

(2) $ny^{n-1}(x-y)<x^n-y^n<nx^{n-1}(x-y)\quad(n>1,\ x>y>0)$;

(3) $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}\quad(b>a>0)$;

(4) $e^x>1+x\quad(x>0)$.

证 (1) $|\sin x-\sin y|=|\cos\xi\cdot(x-y)|\le|x-y|$。

(2) $x^n-y^n=n\xi^{n-1}(x-y)$, 其中 $x>\xi>y>0$。由 $x^{n-1}>\xi^{n-1}>y^{n-1}>0$ 得到

$$ny^{n-1}(x-y)<x^n-y^n<nx^{n-1}(x-y)\quad(n>1,\ x>y>0)。$$

(3) $\ln\dfrac{b}{a}=\ln b-\ln a=\dfrac{1}{\xi}(b-a)$，其中 $b>\xi>a>0$。由于 $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{a}$，所以

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}。$$

(4) $e^x-1=e^x-e^0=e^\xi(x-0)>x,\quad x>\xi>0$。

9． 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义，且对任何实数 x_1 和 x_2，满足

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le(x_1-x_2)^2,$$

证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数。

证 首先由 $|f(x_1)-f(x_2)|\le(x_1-x_2)^2$ 可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。对任意固定的 $x_2\in(a,b)$，$\lim\limits_{x_1\to x_2}\left|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\le\lim\limits_{x_1\to x_2}|x_1-x_2|=0$，故 $f'(x_2)=0$，再由 x_2 的任意性，得到 $f'(x)$ 在 (a,b) 上恒等于 0。所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数。

10． 证明恒等式

(1) $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$， $x\in[0,1]$；

(2) $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$， $x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$；

(3) $2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi$， $x\in[1,+\infty)$.

证（1）令 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，则

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv 0,\forall x\in(0,1)。$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，所以 $f(x)\equiv f(0)=\dfrac{\pi}{2}$。

（2）令 $f(x)=3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)$，注意到 $1-4x^2\geq 0,\forall x\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，所以

$$f'(x)=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}\equiv 0,\forall x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})。$$

由于 $f(x)$ 在 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$ 连续，所以 $f(x)\equiv f(0)=3\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}=\pi$。

(3) 令 $f(x)=2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$，注意到 $x^2-1>0,\forall x>1$，所以

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}\equiv 0,\forall x>1。$$

由于 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 连续，所以 $f(x)\equiv f(1)=2\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}=\pi$。

11．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导。证明：若 (a,b) 中除至多有限个点有 $f'(x)=0$ 之外，都有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加；同时举例说明，其逆命题不成立。

证 设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 是 $f'(x)$ 全部的零点。则 $f(x)$ 在 $[x_i,x_{i+1}]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 上严格单调增加。从而，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加。

构造函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ 3\cdot 2^{-(n+2)}+2^{-(n+2)}\cos(\frac{1}{x}-n)\pi, & \frac{1}{n+1}<x\leq\frac{1}{n},n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

由于 $f(\frac{1}{n})=2^{-n}=f(\frac{1}{n}+)$， $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续。因为当 $\frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n}$ 时，

$f'(x)=\frac{2^{-(n+2)}}{x^2}\sin(\frac{1}{x}-n)\pi>0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 严格单调增加。但 $f'(\frac{1}{n})=0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有无限多个零点。

12． 证明不等式：

(1) $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$； (2) $3-\frac{1}{x}<2\sqrt{x},\quad x>1$；

(3) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,\quad x>0$； (4) $\tan x+2\sin x>3x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$；

(5) $\frac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1,\quad x\in[0,1],(p>1)$；

(6) $\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x}$， $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

证（1）令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$， $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，由于

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0,$$

可知 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 严格单调减少，所以 $\frac{2}{\pi}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}<\frac{\sin x}{x}<\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，从而得到

$$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x,\quad x\in(0,\frac{\pi}{2})。$$

（2）令 $f(x)=2\sqrt{x}-(3-\frac{1}{x})$，则 $f(1)=0$，

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}>0,\ x>1，$$

所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 严格单调增加，故 $f(x)>0$，从而

$$3-\frac{1}{x}<2\sqrt{x},\quad x>1。$$

（3）令 $f(x)=\ln(1+x)-(x-\frac{x^2}{2})$，则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0,\quad x>0，$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格单调增加，由 $f(0)=0$ 知 $f(x)>0,\forall x>0$，从而

$$\ln(1+x)>(x-\frac{x^2}{2}),\quad x>0。$$

令 $g(x)=x-\ln(1+x)$，则

$$g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0,\quad x>0，$$

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格单调增加，由 $g(0)=0$ 知 $g(x)>0,\forall x>0$，从而

$$x>\ln(1+x),\quad x>0。$$

（4）令 $f(x)=\tan x+2\sin x-3x$，则 $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2})$，

$$f'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3\geq 3\sqrt[3]{\sec^2 x\cos x\cos x}-3=0，$$

等号仅在 $x=0$ 成立，所以 $f(x)$ 严格单调增加，从而 $f(x)>0$，即

$$\tan x+2\sin x>3x，\quad x\in(0,\frac{\pi}{2})。$$

（5）令 $f(x)=x^p+(1-x)^p$，则 $f'(x)=p(x^{p-1}-(1-x)^{p-1})$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 取负值，在 $(\frac{1}{2},1)$ 取正值，即 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 严格单调减少，在 $[\frac{1}{2},1]$ 严格单调增加，所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 取到最小值 $\frac{1}{2^{p-1}}$。又 $f(0)=f(1)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=0,1$ 取到最大值1，因而成立

$$\frac{1}{2^{p-1}}\leq x^p+(1-x)^p\leq 1，\quad x\in[0,1]。$$

（6）令 $f(x)=\sin x\tan x-x^2$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$。则

$$f'(x)=\sin x+\sin x\sec^2 x-2x，\qquad f''(x)=\cos x+\frac{1}{\cos x}+\frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}-2。$$

显然 $f''(x)>0$，由 $f'(0)=0$，可知 $f'(x)>0$。再由 $f(0)=0$，得到 $f(x)>0$，从而

$$\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}，\quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)。$$

13． 证明：在 $(0,1)$ 上成立

（1） $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$ ；

（2） $\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$。

证 （1）令 $f(x) = x^2 - (1+x)\ln^2(1+x)$，则

$$f'(x) = 2x - \ln^2(1+x) - 2\ln(1+x)，$$

$$f''(x) = 2 - 2\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2}{1+x} = \frac{2(x - \ln(1+x))}{1+x} > 0, \quad x \in (0,1)。$$

由 $f'(0) = 0$，可知 $f'(x) > 0$，再由 $f(0) = 0$，得到 $f(x) > 0$，即

$$(1+x)\ln^2(1+x) < x^2, x \in (0,1)。$$

（2） 令 $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$，由（1），

$$f'(x) = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)} < 0, \quad x \in (0,1)，$$

即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上严格单调减少。再由 $f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$ 与

$f(0+) = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$，得到

$$\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}，\quad x \in (0,1)。$$

14． 对于每个正整数 n （$n \ge 2$），证明方程

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x = 1$$

在 $(0,1)$ 内必有唯一的实根 x_n，并求极限 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$。

证 设 $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1$，则当 $x \in (0,1)$ 时，

$$f_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1 > 0，$$

所以 $f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 严格单调增加，且当 $n\ge 2$ 时，$f_n(0)=-1, f_n(1)=n-1>0$，所以 $f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 内必有唯一的实根 x_n。显然 $\{x_n\}$ 单调减少有下界，所以必定收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $0\le a<1$，且当 $n\ge 2$ 时，$0<x_n\le x_2<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n=0$。于是有

$$1=\lim_{n\to\infty}(x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n^2+x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=\frac{a}{1-a},$$

解得 $a=\frac{1}{2}$，即

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}。$$

15．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$。证明：

（1）存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f(\xi)=\xi$；

（2）对于任意实数 λ，必存在 $\eta\in(0,\xi)$，使得

$$f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1。$$

证（1）令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且有

$$F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}>0, F(1)=-1<0,$$

所以存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$。

（2）令 $G(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$，则 $G(0)=G(\xi)=0$，应用 Rolle 定理，必存在 $\eta\in(0,\xi)$，使得

$$G'(\eta)=e^{-\lambda\eta}[f'(\eta)-1]-\lambda e^{-\lambda\eta}[f(\eta)-\eta]=0,$$

于是成立 $f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$。

16．设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $g'(x)\ne 0\ (x\in(a,b))$。分别利用辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

和

$$\psi(x)=\begin{vmatrix} g(x) & f(x) & 1 \\ g(a) & f(a) & 1 \\ g(b) & f(b) & 1 \end{vmatrix},$$

证明 Cauchy 中值定理，并说明$\varphi(x)$和$\psi(x)$的几何意义。

证　由于$\varphi(a)=\varphi(b)=0$，应用 Rolle 定理，必存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0,$$

于是 Cauchy 中值定理成立。

$\varphi(t)$的几何意义：参数方程$\begin{cases}x=g(t)\\y=f(t)\end{cases}$所表示的曲线上点的纵坐标与连接点$(g(a),f(a))$和点$(g(b),f(b))$的直线段上点的纵坐标之差。

由于$\psi(a)=\psi(b)=0$，应用 Rolle 定理，必存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\psi'(\xi)=\begin{vmatrix}g'(\xi)&f'(\xi)&0\\g(a)&f(a)&1\\g(b)&f(b)&1\end{vmatrix}=g'(\xi)[f(a)-f(b)]-f'(\xi)[g(a)-g(b)]=0,$$

于是 Cauchy 中值定理成立。

$\psi(x)$的几何意义：其绝对值等于由$(g(x),f(x)),(g(a),f(a)),(g(b),f(b))$为顶点的三角形面积的两倍，如果三顶点按照逆时针方向排列，则$\psi(x)$的符号为正，否则为负。

17．　设$a,b>0$，$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，证明存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)。$$

证　令$g(x)=x^2$，对$f(x),g(x)$应用 Cauchy 中值定理，可知必存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

从而

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)。$$

18．　设$a,b>0$，证明存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b)。$$

证　对于$f(x)=\dfrac{e^x}{x},g(x)=\dfrac{1}{x}$应用 Cauchy 中值定理，可知必存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{\dfrac{e^b}{b}-\dfrac{e^a}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{e^{\xi}(\xi-1)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=(1-\xi)e^{\xi},$$

整理后即得到

$$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b)。$$

19．设$f(x)$在$[a,b]$上连续（$ab>0$），在(a,b)上可导，证明存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=\xi f'(\xi)-f(\xi)。$$

证 对$\frac{f(x)}{x}$与$\frac{1}{x}$应用 Cauchy 中值定理，可知必定存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{f'(\xi)\xi-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=-[f'(\xi)\xi-f(\xi)],$$

于是成立

$$\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}=f'(\xi)\xi-f(\xi),$$

整理后即可得命题成立。

20．设$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续，在$(1,+\infty)$上可导，已知函数$e^{-x}f'(x)$在$(1,+\infty)$上有界，证明函数$e^{-x}f(x)$在$(1,+\infty)$上也有界。

证 首先$e^{-x}f(x)$在$[1,2]$上连续，所以有界。当$x>2$时，由 Cauchy 中值定理，

$$|e^{-x}f(x)|<\frac{|f(x)-f(1)|}{e^x}+\frac{|f(1)|}{e^2}<\frac{|f(x)-f(1)|}{e^x-e^1}+\frac{|f(1)|}{e^2}=\left|e^{-\xi}f'(\xi)\right|+\frac{|f(1)|}{e^2}$$

也是有界的，所以$e^{-x}f(x)$在$(1,+\infty)$上有界。

21． 设$f'(x)$在$(0,a]$上连续，且存在有限极限$\lim\limits_{x\to0+}\sqrt{x}f'(x)$，证明$f(x)$在$(0,a]$上一致连续。

证 由于

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{2\sqrt{\xi}}}=2\sqrt{\xi}f'(\xi),$$

所以只要证明$\sqrt{x}f'(x)$在$(0,a]$上有界就可以了。显然$\sqrt{x}f'(x)$在$(0,a]$连续，且极限$\lim\limits_{x\to0+}\sqrt{x}f'(x)$存在而且有限，所以$\sqrt{x}f'(x)$在$(0,a]$上有界。

22. 设$f(x)$在$x=0$的某邻域内有n阶导数，且
$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，用 Cauchy 中值定理证明

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\quad(0<\theta<1)。$$

证 反复使用 Cauchy 中值定理，

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x^n-0^n}=\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{\,n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n\xi_1^{\,n-1}-n0^{n-1}}=\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{\,n-2}}$$

$$=\cdots=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!\xi_{n-1}}=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{n!(\xi_{n-1}-0)}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!},\quad \xi_n\in(0,x),$$

所以存在$\theta\in(0,1)$，使得$\xi_n=\theta x$，命题成立。

23． 证明不等式：

(1) $\dfrac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$, $x,y>0,n>1$；　　(2) $\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$，　$x\ne y$.

证（1）设 $f(x)=x^n$，则当 $n>1$ 时

$$f'(x)=nx^{n-1}$$
$$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0,\quad \forall x>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下凸，因而

$$\frac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^n,\ x,y>0\text{。}$$

（2）设 $f(x)=e^x$，则

$$f'(x)=f''(x)=e^x>0\text{，}\quad x\in(-\infty,+\infty)\text{，}$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格下凸，因而

$$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}},\quad x\ne y\text{。}$$

24．（Jensen 不等式）设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续下凸函数，证明对于任意 $x_i\in[a,b]$ 和 $\lambda_i>0$（$i=1,2,\cdots,n$），$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，成立

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\text{。}$$

证 应用数学归纳法。当 $k=2$ 时，由下凸函数定义知 Jensen 不等式成立。现假设当 $k=n-1$ 时 Jensen 不等式成立，则当 $k=n$ 时，

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=f\left((\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i)\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}+\lambda_n x_n\right)$$

$$\le\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}\right)+\lambda_n f(x_n)$$

$$\le\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}f(x_i)+\lambda_n f(x_n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\text{。}$$

所以 Jensen 不等式对一切 n 成立。

25．利用上题结论证明：对于正数 a,b,c 成立

$$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\le a^a b^b c^c\text{。}$$

证 设 $f(x)=x\ln x$，则

$$f'(x)=1+\ln x,$$
$$f''(x)=\frac{1}{x}>0,\quad \forall x>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下凸，因而

$$\frac{a+b+c}{3}\ln\frac{a+b+c}{3}\le\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{3},\quad \forall a,c,b>0.$$

利用平均值不等式$\sqrt[3]{abc}\le\frac{a+b+c}{3},\quad \forall a,b,c>0$，得到

$$\frac{a+b+c}{3}\ln\sqrt[3]{abc}\le\frac{a+b+c}{3}\ln\frac{a+b+c}{3}\le\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{3},$$

即

$$(a+b+c)\ln\sqrt[3]{abc}=\ln(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\le a\ln a+b\ln b+c\ln c=\ln(a^a b^b c^c),$$

命题得证。

26． 设$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导，并且$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$。

证 由$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，可知$\forall\varepsilon>0,\exists X'>0,\forall x>X'$，成立$|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$。取定$x_0\ge X'$，则$\exists X>x_0,\forall x>X$，成立$\left|\frac{f(x_0)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，应用 Lagrange 中值定理，则有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\left|\frac{f(x_0)}{x}+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{x-x_0}{x}\right|\le\left|\frac{f(x_0)}{x}\right|+\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\cdot\left|\frac{x-x_0}{x}\right|$$

$$=\left|\frac{f(x_0)}{x}\right|+|f'(\xi)|\cdot\left|\frac{x-x_0}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$成立。

27．设$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)二阶可导，证明存在$\eta\in(a,b)$，成立

$$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(\eta)。$$

证 设$g(x)=f(x)-f(x-\frac{b-a}{2})$。由于

$$g(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(a),\quad g(b)=f(b)-f(\frac{a+b}{2}),$$

在区间$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$上对$g(x)$应用 Lagrange 中值定理，即得到

$$f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=g(b)-g(\frac{a+b}{2})=g'(\xi)(\frac{b-a}{2})$$

$$=[f'(\xi)-f'(\xi-\frac{b-a}{2})](\frac{b-a}{2})=f''(\eta)(\frac{b-a}{2})^2。$$