习　题　13.4　反常重积分

1．　讨论下列反常积分的敛散性：

（1）$\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\dfrac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$；

（2）$\iint\limits_{\mathbf{D}}\dfrac{\varphi(x,y)}{\left(1+x^2+y^2\right)^p}dxdy$，$\mathbf{D}=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1\}$，而且$0<m\le\left|\varphi(x,y)\right|\le M$（$m,M$为常数）；

（3）$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\dfrac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dxdy$，其中$\varphi(x,y)$满足与上题同样的条件；

（4）$\iint\limits_{[0,a]\times[0,a]}\dfrac{dxdy}{\left|x-y\right|^p}$；

（5）$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}\dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$。

解（1）由于

$$\iint\limits_{|x|\le A,|y|\le B}\frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}=\int_{-A}^{A}\frac{dx}{1+|x|^p}\int_{-B}^{B}\frac{dy}{1+|y|^q},$$

当A,B都趋于正无穷大时,等式右端的积分当仅当$p>1$且$q>1$时收敛，所以原积分当$p>1$且$q>1$时收敛，而在其他情况下发散。

（2）由于

$$\frac{m}{(1+x^2+y^2)^p}\le\frac{\left|\varphi(x,y)\right|}{(1+x^2+y^2)^p}\le\frac{M}{(1+x^2+y^2)^p},$$

而积分$\iint\limits_{\mathbf{D}}\dfrac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^p}dxdy$当$p>\dfrac{1}{2}$时收敛，当$p\le\dfrac{1}{2}$时发散，所以原积分当$p>\dfrac{1}{2}$时收敛，当$p\le\dfrac{1}{2}$时发散。

（3）由于

$$\frac{m}{(1-x^2-y^2)^p}\le\frac{\left|\varphi(x,y)\right|}{(1-x^2-y^2)^p}\le\frac{M}{(1-x^2-y^2)^p},$$

而

$$\iint\limits_{\rho^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{1}{(1-x^2-y^2)^p}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\rho^1\frac{rdr}{(1-r^2)^p}=-\pi\int_\rho^1\frac{d(1-r^2)}{(1-r^2)^p},$$

当$\rho\to 0$时，等式右端的积分当$p<1$时收敛，当$p\ge 1$时发散，所以原积分当$p<1$时收敛，当$p\ge 1$时发散。

（4）$[0,a]\times[0,a]=D_1\cup D_2$，其中

$$D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le x\le a\right\},\quad D_2=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le y\le a\right\}。$$

则

$$\iint\limits_{[0,a]\times[0,a]}\frac{dxdy}{|x-y|^p}=\iint\limits_{D_1}\frac{dxdy}{(x-y)^p}+\iint\limits_{D_2}\frac{dxdy}{(y-x)^p}$$

$$=\int_0^a dy\int_y^a\frac{dx}{(x-y)^p}+\int_0^a dx\int_x^a\frac{dx}{(y-x)^p},$$

可知当$p<1$时积分收敛，当$p\ge 1$时积分发散。

（5）利用球面坐标，得到

$$\iiint\limits_{\rho^2\le x^2+y^2+z^2\le 1}\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}=4\pi\int_\rho^1\frac{dr}{r^{2p-2}},$$

当$\rho\to 0$时，右边的积分当且仅当$2p-2<1$即$p<\dfrac{3}{2}$时收敛，所以原积分当$p<\dfrac{3}{2}$时收敛，当$p\ge\dfrac{3}{2}$时发散。

2．计算下列反常积分：

（1）$\iint\limits_{\mathbf{D}}\dfrac{dxdy}{x^py^q}$，其中$\mathbf{D}=\{(x,y)\,|xy\ge 1,x\ge 1\}$，且$p>q>1$；

（2）$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ge 1}e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy$；

（3）$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$。

解 （1）$$\iint\limits_{\mathbf{D}}\frac{dxdy}{x^py^q}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{1}{y^q}dy。$$

$$=\frac{1}{q-1}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{p-q+1}}dx=\frac{1}{(p-q)(q-1)}。$$

（2）作广义极坐标变换$x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$，则

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ge 1}e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy=ab\iint\limits_{r\ge 1}e^{-r^2}rdrd\theta=ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{+\infty}e^{-r^2}rdr=\frac{\pi ab}{e}。$$

（3）$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^3=\pi^{\frac{3}{2}}。$$

3．设$\mathbf{D}$是由第一象限内的抛物线$y=x^2$，圆周$x^2+y^2=1$以及x轴所围的平面区域，证明$\iint\limits_{\mathbf{D}}\dfrac{dxdy}{x^2+y^2}$收敛。

证 取$r>0$充分小，设$D_r=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le x^2,0\le x\le r\right\}$，$x_0$是抛物线$y=x^2$与圆周$x^2+y^2=1$交点的横坐标，则

$$\iint\limits_{\mathbf{D}\backslash D_r}\frac{dxdy}{x^2+y^2}=\int_r^{x_0}dx\int_0^{x^2}\frac{dy}{x^2+y^2}+\int_{x_0}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{x^2+y^2}$$

$$=\int_r^{x_0}\frac{\arctan x}{x}dx+\int_{x_0}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{x^2+y^2}\text{，}$$

由于$\lim\limits_{r\to 0}\int_r^{x_0}\frac{\arctan x}{x}dx$存在，所以$\lim\limits_{r\to 0}\iint\limits_{\mathbf{D}\setminus D_r}\frac{dxdy}{x^2+y^2}$存在，即反常积分$\iint\limits_{\mathbf{D}}\frac{dxdy}{x^2+y^2}$收敛。

4．判别反常积分

$$I=\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

是否收敛。如果收敛，求其值。

解 因为$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}$收敛，所以$I=\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}$收敛，并且

$$I=\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}=\pi^2\text{。}$$

5．设$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\le x\le t\\0\le y\le t}}e^{-\frac{tx}{y^2}}dxdy$，求$F'(t)$。

解 当$t>0$时，令$\begin{cases}x=tu\\y=tv\end{cases}$，则$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=t^2$，于是

$$F(t)=t^2\cdot\iint\limits_{\substack{0\le u\le 1\\0\le v\le 1}}e^{-\frac{u}{v^2}}dudv\text{，}$$

所以

$$F'(t)=2t\cdot\iint\limits_{\substack{0\le u\le 1\\0\le v\le 1}}e^{-\frac{u}{v^2}}dudv=\frac{2F(t)}{t}\text{。}$$

当$t=0$时，$F(0)=0$，易得

$$F'(0)=\lim_{t\to 0+}\frac{F(t)-F(0)}{t}=0\text{。}$$

6．设函数$f(x)$在$[0,a]$上连续，证明

$$\iint\limits_{0\le y\le x\le a}\frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dxdy=\pi\int_0^a f(x)dx\text{。}$$

证 由于

$$\iint\limits_{0\le y\le x\le a}\frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dxdy=\int_0^a f(y)dy\int_y^a\frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dx\text{，}$$

在积分$\int_y^a\frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dx$中，令$x=y\cos^2 t+a\sin^2 t$，则$dx=(a-y)\sin 2tdt$，且当$x:y\to a$时，$t:0\to\frac{\pi}{2}$，于是

$$\int_y^a \frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2dt = \pi \text{，}$$

所以

$$\iint\limits_{0\le y\le x\le a} \frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dxdy = \pi\int_0^a f(x)dx \text{。}$$

7．计算积分 $\int\limits_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)}\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ 。

解 $\int\limits_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)}\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1{}^2} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2{}^2} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_n{}^2} dx_n = \pi^{\frac{n}{2}} \text{。}$$