第十章　函数项级数

习　题 10.1　函数项级数的一致收敛性

1. 讨论下列函数序列在指定区间上的一致收敛性。

(1) $S_n(x) = e^{-nx}$，　(i) $x\in(0,1)$，　(ii) $x\in(1,+\infty)$；

(2) $S_n(x) = xe^{-nx}$，　$x\in(0,+\infty)$；

(3) $S_n(x) = \sin\frac{x}{n}$，　(i) $x\in(-\infty,+\infty)$，　(ii) $x\in[-A,A]\,(A>0)$；

(4) $S_n(x) = \arctan nx$，　(i) $x\in(0,1)$，　(ii) $x\in(1,+\infty)$；

(5) $S_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$，　$x\in(-\infty,+\infty)$；

(6) $S_n(x) = nx(1-x)^n$，　$x\in[0,1]$；

(7) $S_n(x) = \frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$，　(i) $x\in(0,1)$，　(ii) $x\in(1,+\infty)$)；

(8) $S_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$，　(i) $x\in(0,1)$，　(ii) $x\in(1,+\infty)$；

(9) $S_n(x) = (\sin x)^n$，　$x\in[0,\pi]$；

(10) $S_n(x) = (\sin x)^{\frac{1}{n}}$，　(i) $x\in[0,\pi]$，　(ii) $x\in[\delta,\pi-\delta]$　($\delta>0$)；

(11) $S_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$，　(i) $x\in(0,+\infty)$，　(ii) $x\in(0,A]\,(A>0)$；

(12) $S_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$，　(i) $x\in(0,+\infty)$，　(ii) $x\in[\delta,+\infty)$, $\delta>0$。

解　(1) (i) $S(x)=0$，

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,1)}\left|S_n(x)-S(x)\right|=1 \not\longrightarrow 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,1)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=0$，

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(1,+\infty)}\left|S_n(x)-S(x)\right|=e^{-n}\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(1,+\infty)$上一致收敛。

(2) $S(x)=0$，

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|S_n(x)-S(x)\right|=\frac{1}{ne}\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上一致收敛。

（3）(i) $S(x)=0$，

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=1 \not\to 0 \ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=0$，当$n>\dfrac{2A}{\pi}$，

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in[-A,A]}|S_n(x)-S(x)|\le\frac{A}{n}\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[-A,A]$上一致收敛。

（4）(i) $S(x)=\dfrac{\pi}{2}$，

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,1)}|S_n(x)-S(x)|=\frac{\pi}{2} \not\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,1)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=\dfrac{\pi}{2}$，

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(1,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\frac{\pi}{2}-\arctan n\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(1,+\infty)$上一致收敛。

（5）$S(x)=|x|$，由于$|S_n(x)-S(x)|=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}-|x|\le\dfrac{1}{n}$，于是

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

（6）$S(x)=0$，

$$S_n(\frac{1}{n})-S(\frac{1}{n})=(1-\frac{1}{n})^n \not\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上非一致收敛。

（7）(i) $S(x)=0$，由于$S_n(0+)-S(0+)=0$，且

$$\frac{d}{dx}\left[S_n(x)-S(x)\right]=\frac{1}{n}(1+\ln\frac{x}{n})<0 \quad (n\geq 2)\text{，}$$

于是

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,1)}\left|S_n(x)-S(x)\right|=\frac{\ln n}{n}\to 0\ (n\to\infty)\text{，}$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,1)$上一致收敛。

(ii) $S(x)=0$，

$$S_n(2n)-S(2n)=2\ln 2 \ \not\to\ 0\ (n\to\infty)\text{，}$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(1,+\infty)$上非一致收敛。

（8）(i) $S(x)=0$，

$$S_n(1-\frac{1}{n})-S(1-\frac{1}{n})=\frac{(1-\frac{1}{n})^n}{1+(1-\frac{1}{n})^n}\ \not\to\ 0\ (n\to\infty)\text{，}$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,1)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=1$，

$$S_n(1+\frac{1}{n})-S(1+\frac{1}{n})=\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{1+(1+\frac{1}{n})^n}-1\ \not\to\ 0\ (n\to\infty)\text{，}$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(1,+\infty)$上非一致收敛。

（9）$S(x)=\begin{cases}1 & x=\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & x\in[0,\pi],x\neq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，取$x_n\in[0,\pi]$，使得$\sin x_n=1-\dfrac{1}{n}$，则$x_n\neq\dfrac{\pi}{2}$，

$$S_n(x_n)-S(x_n)=(1-\frac{1}{n})^n\ \not\to\ 0\ (n\to\infty)\text{，}$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,\pi]$上非一致收敛。

（10）(i) $S(x)=\begin{cases}0 & x=0,\pi\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$，取$x_n\in(0,\pi)$，使得$\sin x_n=\dfrac{1}{2^n}$，则

$$S_n(x_n)-S(x_n)=\frac{1}{2}-1 \not\longrightarrow 0 \text{（}n\to\infty\text{）},$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,\pi)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=1$，

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in[\delta,\pi-\delta]}\left|S_n(x)-S(x)\right|=1-\sin^{\frac{1}{n}}\delta\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[\delta,\pi-\delta]$上一致收敛。

（11）(i) $S(x)=e^x$，

$$S_n(n)-S(n)=2^n-e^n \not\longrightarrow 0 \text{（}n\to\infty\text{）},$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=e^x$，由于$S_n(0+)-S(0+)=0$，且当n充分大时，

$$\frac{d}{dx}\left[S_n(x)-S(x)\right]=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}-e^x<0,$$

于是

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,A]}\left|S_n(x)-S(x)\right|=e^A-\left(1+\frac{A}{n}\right)^n\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,A]$上一致收敛。

（12）(i) $S(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，

$$S_n(\frac{1}{n})-S(\frac{1}{n})=\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)\sqrt{n} \not\longrightarrow 0 \text{（}n\to\infty\text{）},$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，

$$S_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}=S(x),$$

由于

$$\frac{d}{dx}\left[S_n(x)-S(x)\right]=\frac{-1}{2\sqrt{x(x+\frac{1}{n})}(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}})}+\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}>0,$$

可知

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in[\delta,+\infty)}\left|S_n(x)-S(x)\right|=\left|S_n(\delta)-S(\delta)\right|$$

$$=-n\left(\sqrt{\delta+\frac{1}{n}}-\sqrt{\delta}\right)+\frac{1}{2\sqrt{\delta}}\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[\delta,+\infty)$上一致收敛。

2. 设$S_n(x) = n(x^n - x^{2n})$，则函数序列$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上收敛但不一致收敛，且极限运算与积分运算不能交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x。$$

证 函数序列$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上收敛于$S(x)=0$。取$x_n=1-\frac{1}{n}$，则

$$S_n(x_n)-S(x_n)=n\left[(1-\frac{1}{n})^n-(1-\frac{1}{n})^{2n}\right]\to+\infty,$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上非一致收敛。

由于

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n(x^n-x^{2n})\mathrm{d}x=\frac{1}{2},\quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x。$$

3. 设$S_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$，则

⑴ 函数序列$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛；

⑵ $\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛；

⑶ 极限运算与求导运算不能交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

并不对一切$x\in(-\infty,+\infty)$成立。

解 （1）$S_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$，$S(x)=0$，则

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|=\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|\le\frac{1}{2n}\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

（2） $\frac{d}{dx}S_n(x)=\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$， $\sigma(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d}{dx}S_n(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$，

取$x_n=\frac{1}{2n}$，则

$$\frac{d}{dx}S_n(x_n)-\sigma(x_n)=\frac{12}{25}\not\to 0\ （n\to\infty），$$

所以$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)\right\}$在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛。

（3）由于在$x=0$处，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0，\ \sigma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}S_n(x)=1，$$

所以在$x=0$处，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

不成立。

4. 设$S_n(x)=\frac{1}{n}\arctan x^n$，则函数序列$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上一致收敛；试问极限运算与求导运算能否交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

是否成立?

解 $S_n(x)=\frac{1}{n}\arctan x^n$， $S_n'(x)=\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$，

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0，\ S'(x)=0，$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n'(1)=\frac{1}{2}\neq S'(1)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

在$x=1$不成立。

5. 设$S_n(x)=n^\alpha xe^{-nx}$，其中a是参数。求a的取值范围，使得函数序列$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上

⑴ 一致收敛；

⑵ 积分运算与极限运算可以交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x；$$

⑶ 求导运算与极限运算可以交换，即对一切$x\in[0,1]$成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)\ 。$$

解　(1) $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$，令 $S_n'(x)=n^{\alpha}e^{-nx}(1-nx)=0$，得到 $x=\dfrac{1}{n}$，即

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in[0,1]}\left|S_n(x)-S(x)\right|=S_n(\frac{1}{n})=n^{\alpha-1}e^{-1},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}d(S_n,S)=0$ 当且仅当 $\alpha<1$ 时成立，所以当 $\alpha<1$ 时，$\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

(2) $\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 S(x)dx=0$，$\int_0^1 S_n(x)dx=n^{\alpha-2}-n^{\alpha-1}(1+\dfrac{1}{n})e^{-n}$，

所以当且仅当 $\alpha<2$ 时，成立.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x。$$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}S(x)=0$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}S_n(x)=n^{\alpha}e^{-nx}(1-nx)$，

由于

$$\lim_{n\to\infty}e^{-nx}(1-nx)=\begin{cases}0 & x\in(0,1]\\1 & x=0\end{cases},$$

所以当且仅当 $\alpha<0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

对一切 $x\in[0,1]$ 成立。

6.　设 $S'(x)$ 在区间 (a,b) 上连续，

$$S_n(x)=n\left[S\left(x+\frac{1}{n}\right)-S(x)\right],$$

证明：$\{S_n(x)\}$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛于 $S'(x)$。

解　显然 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S'(x)$，所以只须证明 $\forall\eta>0$，$\{S_n(x)\}$ 在 $[a+\eta,b-\eta]$ 上一致收敛于 $S'(x)$。

取 $0<\alpha<\eta$，则 $S'(x)$ 在 $[a+\alpha,b-\alpha]$ 上一致连续，即

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，$\forall x',x''\in[a+\alpha,b-\alpha]$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就成立

$$\left|S'(x')-S'(x'')\right|<\varepsilon。$$

取 $N=\max\left\{\left[\dfrac{1}{\delta}\right],\left[\dfrac{1}{\eta-\alpha}\right]\right\}$，则当 $n>N$ 且 $x\in[a+\eta,b-\eta]$ 时，有

$$x+\frac{1}{n}\in[a+\alpha,b-\alpha],$$

于是

$$\left|S_n(x)-S'(x)\right|=\left|S'(\xi)-S'(x)\right|<\varepsilon，$$

所以$\{S_n(x)\}$在(a,b)上内闭一致收敛于$S'(x)$。

7. 设$S_0(x)$在$[0,a]$上连续，令

$$S_n(x)=\int_0^x S_{n-1}(t)\,\mathrm{d}\,t，\qquad n=1,2,\cdots。$$

证明：$\{S_n(x)\}$在$[0,a]$上一致收敛于 0。

证 设$\left|S_0(x)\right|\le M$，则

$$\left|S_1(x)\right|=\left|\int_0^x S_0(t)dt\right|\le Mx，$$

$$\left|S_2(x)\right|=\left|\int_0^x S_1(t)dt\right|\le\int_0^x Mtdt=M\frac{x^2}{2!}，$$

$\cdots$

$$\left|S_n(x)\right|=\left|\int_0^x S_{n-1}(t)dt\right|\le\int_0^x M\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt=M\frac{x^n}{n!}，$$

$\cdots$

由于

$$M\frac{x^n}{n!}\le M\frac{a^n}{n!}，\quad \lim_{n\to\infty}(M\frac{a^n}{n!})=0，$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,a]$上一致收敛于 0。

8. 设$S(x)$在$[0,1]$上连续，且$S(1)=0$。证明：$\{x^n S(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛。

证 $S(x)$在$[0,1]$上连续，所以有界，设$\left|S(x)\right|\le M$。 由$S(1)=0$，可知

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0，\forall x\in[1-\delta,1]，成立\left|x^n S(x)\right|<\varepsilon。$$

由于$\{x^n\}$在$[0,1-\delta]$上一致收敛于零，可知

$$\exists N,\quad \forall n>N，\forall x\in[0,1-\delta]，成立\ \left|x^n\right|<\frac{\varepsilon}{M}，$$

于是

$$\left|x^n S(x)\right|<\varepsilon$$

对一切$x\in[0,1]$成立，因此$\{x^n S(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛。