习 题　14.2　第二类曲线积分与第二类曲面积分

1. 求下列第二类曲线积分：

（1）$\int_{L}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，其中 L 是以 $A(1,0), B(2,0), C(2,1), D(1,1)$ 为顶点的正方形，方向为逆时针方向；

（2）$\int_{L}(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$，其中 L 是抛物线的一段：$y=x^2, -1\le x\le 1$，方向由 $(-1,1)$ 到 $(1,1)$；

（3）$\int_{L}\dfrac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，方向为逆时针方向；

（4）$\int_{L}ydx-xdy+(x^2+y^2)dz$，其中 L 是曲线 $x=e^t,\ y=e^{-t},\ z=a^t$，$0\le t\le 1$，方向由 (e,e^{-1},a) 到 $(1,1,1)$；

（5）$\int_{L}xdx+ydy+(x+y-1)dz$，L 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的直线段；

（6）$\int_{L}ydx+zdy+xdz$，L 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2az,\\ x+z=a\quad (a>0),\end{cases}$ 若从 z 轴的正向看去，L 的方向为逆时针方向；

（7）$\int_{L}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，L 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ y=x\tan\alpha\quad (0<\alpha<\pi),\end{cases}$，若从 x 轴的正向看去，这个圆周的方向为是逆时针方向。

解：（1）$\int_{L}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$

$$=\left\{\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}\right\}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\int_1^2 x^2dx+\int_0^1(4-y^2)dy+\int_2^1(x^2+1)dx+\int_1^0(1-y^2)dy=2。$$

（2）$\int_{L}(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy=\int_{-1}^{1}[(x^2-2x^3)+(x^4-2x^3)2x]dx$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2-4x^4)dx=-\frac{14}{15}。$$

（3）$\int_{L}\dfrac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$

$$=\int_0^{2\pi}[(\cos t+\sin t)(-\sin t)-(\cos t-\sin t)\cos t]dt=-2\pi\text{。}$$

（4） $I=\int\limits_{\mathbf{L}} ydx-xdy+(x^2+y^2)dz=\int_1^0[2+(e^{2t}+e^{-2t})a^t\ln a]dt$。

当 $a=e^2$ 时，$I=\int_1^0(4+2e^{4t})dt=-\frac{1}{2}(7+e^4)$；

当 $a=e^{-2}$ 时，$I=\int_0^1 2e^{-4t}dt=\frac{1}{2}(1-e^{-4})$；

当 $a\neq e^2$ 且 $a\neq e^{-2}$ 时，

$$I=-2+\ln a\int_1^0[(ae^2)^t+(ae^{-2})^t]dt=-2+\left(\frac{1-ae^2}{\ln a+2}+\frac{1-ae^{-2}}{\ln a-2}\right)\ln a\text{。}$$

（5） $\int\limits_L xdx+ydy+(x+y-1)dz=\int_0^1[1+t+2(1+2t)+3(1+3t)]dt=13$。

（6）由曲线积分的定义， 以 $z=a-x$ 代入积分，得到

$$\int\limits_L ydx+zdy+xdz=\int\limits_{L_{xy}}(y-x)dx+(a-x)dy\text{，}$$

其中 L_{xy} 为 L 在 xy 平面上的投影曲线（椭圆）$2x^2+y^2=a^2$，取逆时针方向。

令 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}a\cos t,\ y=a\sin t,\ t:0\to 2\pi$，则

$$\begin{aligned}&\int\limits_L ydx+zdy+xdz\\&=a^2\int_0^{2\pi}[(\sin t-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t)(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t)+(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t)\cos t]dt\\&=-\sqrt{2}\pi a^2\text{。}\end{aligned}$$

（7）由曲线积分的定义，以 $y=x\tan\alpha$ 代入积分，得到

$$\int\limits_L(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=(1-\tan\alpha)\int\limits_{L_{zx}}xdz-zdx\text{，}$$

其中 L_{zx} 为 L 在 zx 平面上的投影曲线（椭圆）$z^2+x^2\sec^2\alpha=1$，取顺时针方向。

令 $x=\cos\alpha\sin t,\ z=\cos t,\ t:2\pi\to 0$，则

$$\begin{aligned}&\int\limits_L(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz\\&=(1-\tan\alpha)\int_{2\pi}^0\cos\alpha(-\sin^2 t-\cos^2 t)dt=2\pi(\cos\alpha-\sin\alpha)\text{。}\end{aligned}$$

2. 证明不等式

$$\left|\int\limits_{\mathbf{L}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|\leq MC\text{，}$$

其中 C 是曲线 $\mathbf{L}$ 的弧长，$M=\max\{\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\,|(x,y)\in\mathbf{L}\}$。记圆周

$x^2+y^2=R^2$为$\mathbf{L}_R$，利用以上不等式估计

$$I_R=\int_{\mathbf{L}_R}\frac{ydx-xdy}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2},$$

并证明

$$\lim_{R\to+\infty}I_R=0。$$

证　由 Schwarz 不等式及$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$，可得

$$\left|\int_{\boldsymbol{L}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|=\left|\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds\right|$$

$$\le\int_L\left|P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta\right|ds$$

$$\le\int_L\sqrt{\left[P^2(x,y)+Q^2(x,y)\right]\left[\cos^2\alpha+\cos^2\beta\right]}ds\le M\int_L ds=MC。$$

在积分$I_R=\int_{\boldsymbol{L}_R}\frac{ydx-xdy}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}$中，令$P(x,y)=\frac{y}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}$，$Q(x,y)=\frac{-x}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}$，则

$$P^2(x,y)+Q^2(x,y)=\frac{x^2+y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}\le\frac{16}{(x^2+y^2)^3},$$

于是 $|I_R|\le\frac{4}{R^3}C=\frac{8\pi}{R^2}$，所以

$$\lim_{R\to+\infty}I_R=0。$$

3. 方向依纵轴的负方向，且大小等于作用点的横坐标的平方的力构成一个力场。求质量为m的质点沿抛物线$y^2=1-x$从点$(1,0)$移到$(0,1)$时，场力所作的功。

解　$W=\int_L\boldsymbol{F}d\boldsymbol{s}=-\int_0^1(1-y^2)^2dy=-\frac{8}{15}$。

4. 计算下列第二类曲面积分：

（1）$\iint_\Sigma(x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy$，其中Σ是中心在原点，边长为$2h$的立方体$[-h,h]\times[-h,h]\times[-h,h]$的表面，方向取外侧；

（2）$\iint_\Sigma yzdzdx$，其中Σ是椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的上半部分，方向取上侧；

（3）$\iint_\Sigma zdydz+xdzdx+ydxdy$，其中Σ是柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$和$z=4$所截部分，方向取外侧；

（4）$\iint_\Sigma zxdydz+3dxdy$，其中Σ是抛物面$z=4-x^2-y^2$在$z\ge0$部分，方向

取下侧；

（5） $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分，方向取上侧；

（6） $\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+5)dxdy$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$（$0\le z\le h$），方向取下侧。

（7） $\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx$，其中 Σ 是抛物面 $y=x^2+z^2$ 与平面 $y=1$， $y=2$ 所围立体的表面，方向取外侧。

（8） $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x}dydz+\frac{1}{y}dzdx+\frac{1}{z}dxdy$，其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，方向取外侧；

（9） $\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，方向取外侧。

解 （1）将 Σ 的上、下、左、右、前、后六个面分别记为 $\Sigma_i\,(i=1,2,3,4,5,6)$。则

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y)dydz=\iint\limits_{\Sigma_5}(x+y)dydz+\iint\limits_{\Sigma_6}(x+y)dydz$$
$$=\iint\limits_{\Sigma_5}xdydz+\iint\limits_{\Sigma_6}xdydz=2h\iint\limits_{D_{yz}}dydz=8h^3,$$
$$\iint\limits_{\Sigma}(y+z)dzdx=\iint\limits_{\Sigma_3}(y+z)dzdx+\iint\limits_{\Sigma_4}(y+z)dzdx$$
$$=\iint\limits_{\Sigma_3}ydzdx+\iint\limits_{\Sigma_4}ydzdx=2h\iint\limits_{D_{zx}}dzdx=8h^3,$$
$$\iint\limits_{\Sigma}(z+x)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}(z+x)dxdy+\iint\limits_{\Sigma_2}(z+x)dxdy$$
$$=\iint\limits_{\Sigma_1}zdxdy+\iint\limits_{\Sigma_2}zdxdy=2h\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=8h^3,$$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy=24h^3。$$

（2）设曲面 Σ 的单位法向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，由 $dzdx=\cos\beta\,dS$ 与 $dxdy=\cos\gamma\,dS$，得到 $dzdx=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy=\frac{c^2y}{b^2z}dxdy$。由于 Σ 的方向取上侧，它在 xy 平面的投影区域为 $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$，于是

$$\iint_{\Sigma} yzdzdx = \iint_{\Sigma} \frac{c^2}{b^2} y^2 dxdy = \iint_{D} \frac{c^2}{b^2} y^2 dxdy$$

$$= abc^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4} abc^2 \text{。}$$

（3）解法一

取曲面Σ的参数表示$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = z \end{cases}$， $D = \{(\theta, z) | \ 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le z \le 4\}$，则

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,z)} = \cos\theta \text{，} \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,z)} = \sin\theta \text{，} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,z)} = 0 \text{。}$$

由于Σ的方向取外侧，于是

$$\iint_{\Sigma} zdydz + xdzdx + ydxdy = \iint_{D} \left[z\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,z)} + \cos\theta \frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,z)} + \sin\theta \frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,z)} \right] d\theta dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \int_0^4 zdz + \int_0^{2\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^4 dz = 0 \text{。}$$

解法二

由于曲面Σ的单位法向量为$(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0)$，可知

$$\iint_{\Sigma} ydxdy = 0 \text{。}$$

将柱面Σ分成前后两部分Σ_1, Σ_2，其中$\Sigma_1 : x = \sqrt{1-y^2}, \Sigma_2 : x = -\sqrt{1-y^2}$，则

$$\iint_{\Sigma} zdydz = \iint_{\Sigma_1} zdydz + \iint_{\Sigma_2} zdydz = \iint_{D_{yz}} zdydz - \iint_{D_{yz}} zdydz = 0 \text{，}$$

类似地可得$\iint_{\Sigma} xdzdx = 0$，所以

$$\iint_{\Sigma} zdydz + xdzdx + ydxdy = 0 \text{。}$$

（4）设曲面Σ的单位法向量为$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，由$dydz = \cos\alpha\, dS$与$dxdy = \cos\gamma\, dS$，得到$dydz = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} dxdy = 2xdxdy$。由于$\Sigma$的方向取下侧，它在$xy$平面的投影区域为$D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 1\}$，于是

$$\iint_{\Sigma} zxdydz + 3dxdy = \iint_{\Sigma} (2x^2 z + 3) dxdy = -\iint_{D} \left[2x^2 (4 - x^2 - y^2) + 3 \right] dxdy$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2[2r^2\cos^2\theta(4-r^2)+3]rdr=-\frac{32}{3}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta-12\pi=-\frac{68}{3}\pi\text{。}$$

（5）平面 Σ 的方程为 $x-y+z=1$，方向取上侧，由此可知 $dydz=dxdy$，$dzdx=-dxdy$，于是

$$\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}\{[f(x,y,z)+x]-[2f(x,y,z)+y]+[f(x,y,z)+z]\}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}dxdy=\frac{1}{2}\text{。}$$

（6）由对称性，$\iint_{\Sigma}x^2dydz=0$，$\iint_{\Sigma}y^2dzdx=0$，所以

$$\iint_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+5)dxdy=-\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2+5)dxdy$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h(r^2+5)rdr=-\frac{\pi}{2}(h^4+10h^2)\text{。}$$

（7）记 $\Sigma_1:y=x^2+z^2(1\le y\le 2)$，方向取外侧；$\Sigma_2:y=1(x^2+z^2\le 1)$，方向取左侧；$\Sigma_3:y=2(x^2+z^2\le 2)$，方向取右侧。则

$$\iint_{\Sigma_1}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=-\iint_{D_{1zx}}\frac{e^{\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{2}}e^rdr=-2\pi(e^{\sqrt{2}}-e)\text{，}$$

$$\iint_{\Sigma_2}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=-\iint_{D_{2zx}}\frac{e}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1edr=-2e\pi\text{，}$$

$$\iint_{\Sigma_3}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=\iint_{D_{3zx}}\frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}}dr=2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\pi\text{，}$$

所以

$$\iint_{\Sigma}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}dzdx=2e^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)\pi\text{。}$$

（8）设 Σ_1,Σ_2 分别表示上、下两半椭球面，方向分别取上、下侧。则

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{z}dxdy=\iint_{\Sigma_1}\frac{1}{z}dxdy+\iint_{\Sigma_2}\frac{1}{z}dxdy=2\iint_{D_{xy}}\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{abrdr}{c\sqrt{1-r^2}}=\frac{4\pi ab}{c}\text{，}$$

由对称性，可得

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{y}dzdx=\frac{4\pi ac}{b}\text{，}\quad\iint_{\Sigma}\frac{1}{x}dydz=\frac{4\pi bc}{a}\text{，}$$

所以

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{x}dydz+\frac{1}{y}dzdx+\frac{1}{z}dxdy=\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\text{。}$$

（9）设Σ_1,Σ_2分别表示上、下两半球面，方向分别取上、下侧。则

$$\iint_{\Sigma} z^2 dxdy = \iint_{\Sigma_1} z^2 dxdy + \iint_{\Sigma_2} z^2 dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} [c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}]^2 dxdy - \iint_{D_{xy}} [c - \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}]^2 dxdy$$

$$= 4c \iint_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} dxdy = \frac{8}{3}\pi c R^3。$$

同理可得

$$\iint_{\Sigma} x^2 dydz = \frac{8}{3}\pi a R^3, \iint_{\Sigma} y^2 dzdx = \frac{8}{3}\pi b R^3，$$

所以

$$\iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = \frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3。$$