习　题　7.2　定积分的基本性质

1．　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义，且在 $[a,b]$ 中除了有限个点之外，都有 $f(x)=g(x)$，证明 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，并且有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx。$$

证　设仅在 $x=c_i\ (i=1,2,\cdots,p)$ 处 $f(x)\neq g(x)$。对区间 $[a,b]$ 作划分：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，则

$$\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\sum{}'(g(\xi_i)-f(\xi_i))\Delta x_i，$$

其中 $\sum{}'$ 表示仅对含有 $\{c_i\}$ 中点的小区间（至多 $2p$ 个）求和。

记 $M_1=\sup\limits_{a\le x\le b}|g(x)|,M_2=\sup\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2p(M_1+M_2)}$，则当 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}<\delta$ 时,

$$\left|\sum{}'(g(\xi_i)-f(\xi_i))\Delta x_i\right|<\varepsilon,$$

所以由 $f(x)$ 可积，可知 $g(x)$ 也可积，且成立 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$。

2．设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都可积，请举例说明一般有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx\neq\left(\int_a^b f(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)dx\right)。$$

解　例如 $f(x)=g(x)=1,x\in[0,2]$，则 $\int_0^2 f(x)dx=2,\int_0^2 g(x)dx=2$，$\int_0^2 f(x)g(x)dx=2$，所以 $\int_a^b f(x)g(x)dx\neq\left(\int_a^b f(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)dx\right)$。

3．　证明：对任意实数 a,b,c，只要 $\int_a^b f(x)dx$，$\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都存在，就成立

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx。$$

证　如设 $a<b<c$，则 $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$，于是

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx。$$

其他情形可类推。

4．判断下列积分的大小：

（1）$\int_0^1 xdx$ 和 $\int_0^1 x^2dx$；　　（2）$\int_1^2 xdx$ 和 $\int_1^2 x^2dx$；

（3）$\int_{-2}^{-1}(\frac{1}{2})^x dx$ 和 $\int_0^1 2^x dx$；　　（4）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$。

解（1）当 $x\in(0,1)$ 时，$x>x^2$，所以 $\int_0^1 xdx>\int_0^1 x^2dx$。

（2）当 $x\in(1,2)$ 时，$x<x^2$，所以 $\int_0^1 xdx<\int_0^1 x^2dx$。

（3）当 $x\in(-2,-1)$ 时，$(\frac{1}{2})^x>2$，而当 $x\in(0,1)$ 时，$2^x<2$，

由积分第一中值定理，可得 $\int_{-2}^{-1}(\frac{1}{2})^x dx>\int_0^1 2^x dx$。

（4）当 $x>0$ 时，$\sin x<x$，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx<\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$。

5．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)\ge 0$ 但不恒为 0，证明

$$\int_a^b f(x)dx>0。$$

证　证明一：不妨设 $f(x_0)>0, x_0\in(a,b)$。由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)>0$，存在 $c>0$ 与 $\delta>0\,(\delta<\min\{a-x_0,b-x_0\})$，使得当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，成立 $f(x)>c$。于是

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0-\delta} f(x)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx+\int_{x_0+\delta}^b f(x)dx\ge\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx\ge 2c\delta>0。$$

$f(x_0)>0$，$x_0=a$ 或 $x_0=b$ 的情况可类似证明。

证明二：用反证法。若 $\int_a^b f(x)dx=0$，则 $\forall t\in[a,b]$, $\int_a^t f(x)dx=0$。由于 $F(t)=\int_a^t f(x)dx$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(t)=f(t), t\in[a,b]$，所以有 $f(t)\equiv 0$，与题设矛盾，从而必定成立 $\int_a^b f(x)dx>0$。

6．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f^2(x)dx=0$，证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为 0。

证 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，可知 $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f^2(x)\ge 0$。由上题即可得到结论。

7．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且满足

$$\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = f(b)。$$

证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

证 由积分第一中值定理，$\exists\eta\in[a,\frac{a+b}{2}],$ 使得

$$f(\eta)=\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = f(b)，$$

再对 $f(x)$ 在 $[\eta,b]$ 上应用 Rolle 定理，$\exists\xi\in(\eta,b)\subset(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

8．设 $\varphi(t)$ 在 $[0,a]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f''(x)\ge 0$。证明

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)dt\right)\le \frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))dt。$$

证 将区间 $[0,a]$ 作划分：$0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=a$，记 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1},\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\},\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$。由于 f 下凸，由 Jensen 不等式（第 5.1 节习题 24），得到

$$f\left(\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)\frac{\Delta t_i}{a}\right)\le \sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i))\frac{\Delta t_i}{a}，$$

令 $\lambda\to 0$，上述不等式就转化为

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)dt\right)\le \frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))dt。$$

9．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且单调减少，证明对任意 $\alpha\in[0,1]$，成立

$$\int_0^\alpha f(x)dx\ge\alpha\int_0^1 f(x)dx。$$

证 证明一：问题等价于证明对任意 $\alpha\in[0,1]$，成立

$$(1-\alpha)\int_0^{\alpha} f(x)dx \ge \alpha\int_{\alpha}^1 f(x)dx 。$$

对不等式两端应用积分第一中值定理，则存在 $x_1 \in [0,\alpha]$ 及 $x_2 \in [\alpha,1]$，使得 $(1-\alpha)\int_0^{\alpha} f(x)dx = \alpha(1-\alpha) f(x_1)$ 及 $\alpha\int_{\alpha}^1 f(x)dx = \alpha(1-\alpha) f(x_2)$ 。由于显然有 $f(x_1) \ge f(x_2)$，所以得到 $(1-\alpha)\int_0^{\alpha} f(x)dx \ge \alpha\int_{\alpha}^1 f(x)dx$ 。

证明二：设 $F(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)dx - \alpha\int_0^1 f(x)dx$，则 $F'(\alpha) = f(\alpha) - \int_0^1 f(x)dx$。由积分第一中值定理，$\exists\xi \in [0,1],$ 使得 $f(\xi) = \int_0^1 f(x)dx$，即 $F'(\alpha) = f(\alpha) - f(\xi)$。

由于 f 单调减少，所以当 $0<\alpha<\xi$ 时，$F'(\alpha) \ge 0$，即 $F(\alpha)$ 单调增加；当 $\xi<\alpha<1$ 时，$F'(\alpha) \le 0$，即 $F(\alpha)$ 单调减少。由 $F(0) = F(1) = 0$，即可得到 $\forall\alpha \in [0,1],$ 成立 $F(\alpha) \ge 0$。

证明三：当 $\alpha = 0$ 时，不等式显然成立。当 $\alpha \in (0,1]$ 时，令 $x = \alpha t$，利用 f 单调减少，就得到 $\int_0^{\alpha} f(x)dx = \alpha\int_0^1 f(\alpha t)dt \ge \alpha\int_0^1 f(t)dt$。

10．（Young 不等式）设 $y = f(x)$ 是 $[0,\infty)$ 上严格单调增加的连续函数，且 $f(0) = 0$，记它的反函数为 $x = f^{-1}(y)$。证明

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \ge ab \quad (a>0,\ b>0)。$$

证 先证当 $b = f(a)$ 时等号成立。

将区间 $[0,a]$ 作划分：$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = a$，记

$y_i = f(x_i)(i = 0,1,2,\cdots,n)$，则 $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = b$，再记

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$，于是

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f^{-1}(y_i)\Delta y_i = \sum_{i=1}^n y_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n x_i(y_i - y_{i-1})$$

$$= x_n y_n - x_0 y_0 = ab，$$

记 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，当 $\lambda \to 0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i + \sum\limits_{i=1}^n f^{-1}(y_i)\Delta y_i$ 的极限为

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy,$$

这就证明了当 $b = f(a)$ 时， $\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy = ab$。

在一般情况下，设 $F(a) = \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy - ab$，则 $F'(a) = f(a) - b$。记 $f(T) = b$，可知当 $0 < a < T$ 时，$F(a)$ 单调减少，当 $a > T$ 时， $F(a)$ 单调增加，所以 $F(a)$ 在 $a = T$ 处取到最小值。由上面的讨论，可知最小值 $F(T) = 0$，从而 $F(a) \ge 0$，这就是所要证明的。

注 当 $b = f(a)$ 时，$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy = ab$ 的结论也可直接从几何图形上看出。

11． 证明定积分的连续性：设函数 $f(x)$ 和 $f_h(x) = f(x+h)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f_h(x) - f(x)|dx = 0。$$

证 由于 $f_h(x) = f(x+h)$ 在 $[a,b]$ 上可积，可知存在 $\delta > 0$，使得 $f(x)$ 在 $[a-\delta, b+\delta]$ 上可积。设 $|f(x)| \le M$ $(x \in [a-\delta, b+\delta])$。

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\forall \varepsilon > 0$，存在对区间 $[a,b]$ n 等分的划分 P，使得当 $\frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{8M}$ 时，成立

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{6}，\text{其中 } \Delta x_i = \frac{b-a}{n} (i = 1,2,\cdots,n)。$$

另外，当 $\frac{b-a}{n} < \delta$ 时，记 ω_0, ω_{n+1} 分别是 $f(x)$ 在区间 $[a - \frac{b-a}{n}, a]$ 和 $[b, b + \frac{b-a}{n}]$ 上的振幅，则 $\omega_0 \le 2M$， $\omega_{n+1} \le 2M$。

因为

$$\int_a^b |f_h(x) - f(x)|dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f_h(x) - f(x)|dx = \sum_{i=1}^n \left| f(\xi_i + h) - f(\xi_i) \right| \Delta x_i,$$

且当$|h|<\frac{b-a}{n}<\min\left\{\frac{\varepsilon}{8M},\delta\right\}$时，由$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，可知

$\xi_i+h\in[x_{i-2},x_{i-1}]\bigcup[x_{i-1},x_i]\bigcup[x_i,x_{i+1}]$，其中$x_{-1}=a-\frac{b-a}{n}, x_{n+1}=b+\frac{b-a}{n}$，从而

有$|f(\xi_i+h)-f(\xi_i)|\le\omega_{i-1}+\omega_i+\omega_{i+1}$，于是

$\int_a^b|f_h(x)-f(x)|\,dx\le\sum_{i=1}^n(\omega_{i-1}+\omega_i+\omega_{i+1})\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+(\omega_0+\omega_{n+1})\frac{b-a}{n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，

所以

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f_h(x)-f(x)|\,dx=0。$$

12．设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上都可积，证明不等式

(1) （Schwarz 不等式）$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$；

(2) （Minkowski 不等式）

$$\left\{\int_a^b[f(x)+g(x)]^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\le\left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\int_a^b g^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}。$$

证（1）由于对任意的t，积分$\int_a^b[tf(x)+g(x)]^2dx\ge 0$，即

$$t^2\int_a^b f^2(x)dx+2t\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx\ge 0$$

所以其判别式恒为非正的，也就是成立

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx；$$

（2）由$\int_a^b f(x)g(x)dx\le\left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_a^b g^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}$，得到

$$\int_a^b f^2(x)dx+2\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx$$

$$\le\int_a^b f^2(x)dx+2\left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_a^b g^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}+\int_a^b g^2(x)dx，$$

即

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx \le \left[\left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_a^b g^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^2,$$

两边开平方，即得到

$$\left\{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \le \left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_a^b g^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}。$$

13．设 $f(x)$和 $g(x)$在$[a, b]$上连续，且 $f(x)\ge 0$， $g(x)>0$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b [f(x)]^n g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}} = \max_{a\le x\le b} f(x)。$$

证　因为在$[a, b]$上 $g(x)>0$，所以有$0<m\le g(x)\le M<+\infty$。记 $A=f(\xi)=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$，不妨设 $A>0$ （因为 $A=0$ 时等式显然成立）。 由 $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=f(\xi)$，可知 $\forall 0<\varepsilon<A$， $\exists[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，使得$\xi\in[\alpha,\beta]$，且当 $x\in[\alpha,\beta]$时，成立 $0<A-\varepsilon<f(x)\le A$，于是

$$(A-\varepsilon)[m(\beta-\alpha)]^{\frac{1}{n}} \le \left\{\int_a^b f^n(x)g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}} \le A[M(b-a)]^{\frac{1}{n}}。$$

由于当$n\to\infty$时$[m(\beta-\alpha)]^{\frac{1}{n}}\to 1$ ，$[M(b-a)]^{\frac{1}{n}}\to 1$ ，所以$\exists N>0$，当$n.>N$时，成立$[m(\beta-\alpha)]^{\frac{1}{n}}>1-\dfrac{\varepsilon}{A}$与$[M(b-a)]^{\frac{1}{n}}<1+\dfrac{2\varepsilon}{A}$， 从而当$n.>N$时，成立 $A-2\varepsilon<\left\{\int_a^b f^n(x)g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}}<A+2\varepsilon$，即$\left|\left\{\int_a^b f^n(x)g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}}-A\right|<2\varepsilon$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b [f(x)]^n g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}} = A = \max_{a\le x\le b} f(x)。$$