第十三章　重积分

习　题 13.1　有界区域上的重积分

1. 设一平面薄板（不计其厚度），它在 xy 平面上的表示是由光滑的简单闭曲线围成的闭区域 $\mathbf{D}$。如果该薄板分布有面密度为 $\mu(x,y)$ 的电荷，且 $\mu(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 上连续，试用二重积分表示该薄板上的全部电荷。

解　设电荷总量为 Q，则

$$Q=\iint_D \mu(x,y)d\sigma 。$$

2. 设函数 $f(x,y)$ 在矩形 $\mathbf{D}=[0,\pi]\times[0,1]$ 上有界，而且除了曲线段 $y=\sin x,\ 0\le x\le\pi$ 外，$f(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 上其它点连续。证明 f 在 $\mathbf{D}$ 上可积。

证　设 $|f(x,y)|\le M,(x,y)\in\mathbf{D}$，将 $\mathbf{D}$ 用平行于两坐标轴的直线分成 n 个小区域 $\Delta D_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\operatorname{diam}\Delta D_i\}$，不妨设 $\Delta D_i\,(i=1,2,\cdots,k)$ 将曲线段 $y=\sin x,\ 0\le x\le\pi$ 包含在内，于是 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\bigcup\limits_{i=k+1}^{n}\Delta D_i$ 上连续，因此 $f(x,y)$ 在 $\bigcup\limits_{i=k+1}^{n}\Delta D_i$ 上可积，即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$，当 $\lambda<\delta_1$ 时，

$$\sum_{i=k+1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i<\frac{\varepsilon}{2}。$$

而当 $\lambda<\dfrac{\varepsilon}{4kM}$ 时，

$$\sum_{i=1}^{k}\omega_i\Delta\sigma_i<2M\sum_{i=1}^{k}\Delta\sigma_i<2kM\lambda<\frac{\varepsilon}{2}。$$

取 $\delta=\min\left(\delta_1,\dfrac{\varepsilon}{4kM}\right)$，当 $\lambda<\delta$ 时，就有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon，$$

所以 f 在 $\mathbf{D}$ 上可积。

3. 按定义计算二重积分 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 $\mathbf{D}=[0,1]\times[0,1]$。

解　将 $\mathbf{D}$ 分成 n^2 个小正方形

$$\Delta D_{ij}=\left\{(x,y)\left|\frac{i-1}{n}\le x\le\frac{i}{n},\frac{j-1}{n}\le y\le\frac{j}{n}\right.\right\}(i,j=1,2,\cdots n)，$$

取 $\xi_i = \frac{i}{n}, \eta_j = \frac{j}{n}$，则

$$\iint_D xydxdy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\eta_j\Delta\sigma_{ij} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i,j=1}^{n} ij$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \frac{1}{4}。$$

4．设一元函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\mathbf{D}=[a,b]\times[c,d]$。定义二元函数

$$F(x,y) = f(x)，\quad (x,y)\in\mathbf{D}。$$

证明 $F(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 上可积。

证 将 $[a,b]$、$[c,d]$ 分别作划分：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

和

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d，$$

则 $\mathbf{D}$ 分成了 nm 个小矩形 $\Delta D_{ij}\,(i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m)$。

记 ω_i 是 $f(x)$ 在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅，$\omega_{ij}(F)$ 是 F 在 ΔD_{ij} 上的振幅，则

$$\omega_{ij}(F) = \omega_i，$$

于是

$$\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}(F)\Delta\sigma_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\Delta y_j = (d-c)\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i，$$

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，可知 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i \to 0\ (\lambda\to 0)$，所以

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}(F)\Delta\sigma_{ij} = \lim_{\lambda\to 0}\left\{(d-c)\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\right\} = 0，$$

即 $F(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 上可积。

5. 设 $\mathbf{D}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的零边界闭区域，二元函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 上可积。证明

$$H(x,y) = \max\{f(x,y), g(x,y)\}$$

和

$$h(x,y) = \min\{f(x,y), g(x,y)\}$$

也在 $\mathbf{D}$ 上可积。

证 首先我们有

$$H(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x,y)+g(x,y)+\left|f(x,y)-g(x,y)\right|\right)，$$

$$h(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x,y)+g(x,y)-\left|f(x,y)-g(x,y)\right|\right)。$$

设$\varphi(x,y)=\left|f(x,y)-g(x,y)\right|$，将$\mathbf{D}$划分成$n$个小区域$\Delta D_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，利用不等式$\left\|a-b\right|-\left|c-d\right\|\le\left|(a-b)-(c-d)\right|\le\left|a-c\right|+\left|b-d\right|$，可得

$$\omega_i(\varphi)\le\omega_i(f)+\omega_i(g)\ (i=1,2,\cdots,n)，$$

于是

$$\omega_i(H)\le\omega_i(f)+\omega_i(g)\ (i=1,2,\cdots,n)，$$

所以

$$0\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i(H)\Delta\sigma_i\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta\sigma_i+\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\Delta\sigma_i，$$

由f,g在$\mathbf{D}$上可积，可知

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(H)\Delta\sigma_i=0，$$

即$H(x,y)=\max\{f(x,y),g(x,y)\}$在$\mathbf{D}$上可积。

类似地可得

$$\omega_i(h)\le\omega_i(f)+\omega_i(g)\ (i=1,2,\cdots,n)，$$

从而得到$h(x,y)=\min\{f(x,y),g(x,y)\}$在$\mathbf{D}$上也可积。