习　题 3.3　无穷小量与无穷大量的阶

1. 确定 a 与 α，使下列各无穷小量或无穷大量等价于(～) ax^{α}：

(1) $u(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3$, ($x\to0$，$x\to\infty$)；

(2) $u(x) = \dfrac{x^5+2x^2}{3x^4-x^3}$ ($x\to0$，$x\to\infty$)；

(3) $u(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$ ($x\to0+$，$x\to+\infty$)；

(4) $u(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ ($x\to0+$，$x\to+\infty$)；

(5) $u(x) = \sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+2x}$ ($x\to0$，$x\to+\infty$)；

(6) $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ ($x\to+\infty$)；

(7) $u(x) = \sqrt{x^3+x} - x^{\frac{3}{2}}$ ($x\to0+$)；

(8) $u(x) = \sqrt{1+x\sqrt{x}} - \mathrm{e}^{2x}$ ($x\to0+$)；

(9) $u(x) = \ln\cos x - \arctan x^2$ ($x\to0$)；

(10) $u(x) = \sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\sin x}$ ($x\to0$)。

解（1） $u(x)\sim 2x^3\ (x\to0)$；$u(x)\sim x^5\ (x\to\infty)$。

（2） $u(x)\sim -2x^{-1}\ (x\to0)$；$u(x)\sim \dfrac{1}{3}x\ (x\to\infty)$。

（3） $u(x)\sim x^{\frac{2}{3}}\ (x\to0+)$；$u(x)\sim x^{\frac{3}{2}}\ (x\to+\infty)$。

（4） $u(x)\sim x^{\frac{1}{8}}\ (x\to0+)$；$u(x)\sim x^{\frac{1}{2}}\ (x\to+\infty)$。

（5） $u(x)\sim \dfrac{5}{6}x\ (x\to0)$；$u(x)\sim \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}\ (x\to+\infty)$。

（6） $u(x)\sim \dfrac{1}{2}x^{-1}\ (x\to+\infty)$。

（7） $u(x)\sim x^{\frac{1}{2}}\ (x\to0+)$。

（8） $u(x)\sim -2x\ (x\to0+)$。

（9） $u(x) \sim -\frac{3}{2}x^2\ (x \to 0)$。

（10） $u(x) \sim x\ (x \to 0)$。

2. (1) 当 $x\to+\infty$时，下列变量都是无穷大量，将它们从低阶到高阶进行排列，并说明理由。

$$a^x\ \ (a>1),\ \ x^x,\ \ x^\alpha\ \ (\alpha>0),\ \ \ln^k x\ \ (k>0),\ \ [x]!\ ;$$

(2) 当 $x\to0+$时，下列变量都是无穷小量，将它们从高阶到低阶进行排列，并说明理由。

$$x^\alpha\ (\alpha>0),\ \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]!},\ a^{-\frac{1}{x}}\ \ (a>1),\ \left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{x}},\ \ln^{-k}\left(\frac{1}{x}\right)\ \ (k>0)。$$

解（1）当 $x\to+\infty$时，从低阶无穷大量到高阶无穷大量的排列为

$$\ln^k x\ \ (k>0),\ \ x^\alpha\ \ (\alpha>0),\ \ a^x\ \ (a>1),\ \ [x]!,\ \ x^x。$$

证明：设$n \le x < n+1$，则$0<\frac{x^\alpha}{a^x}<\frac{(n+1)^\alpha}{a^n}$，$0<\frac{a^x}{[x]!}<\frac{a^{n+1}}{n!}$，$0<\frac{[x]!}{x^x}<\frac{(n+1)!}{n^n}$。

由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha}{a^n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{n!}=0$与$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}=0$，即得到$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^x}{[x]!}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[x]!}{x^x}=0$，同时也得到$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^k x}{x^\alpha}=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y^k}{(e^\alpha)^y}=0\quad(y=\ln x)$。

（2）当 $x\to0+$时，从高阶无穷小量到低阶无穷小量的排列为

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{x}},\ \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]!},\ a^{-\frac{1}{x}}\ \ (a>1),\ \ x^\alpha\ \ (\alpha>0),\ \ \ln^{-k}\left(\frac{1}{x}\right)\ \ (k>0)。$$

证明：令$y=\frac{1}{x}$，则当 $x\to0+$时，有$y\to+\infty$。参考（1）的排列即可得到（2）的排列。

3. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+3x)}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$；

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$；

(5) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{a^x-a^\alpha}{x-\alpha}$ $(a>0)$；

(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x-a}$ $(a>0)$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\ln(1+x)-\ln x\right)$；

(8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$ $(x>0)$；

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)$ $(x>0)$。

解 (1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)-(\sqrt[3]{1+2x^2}-1)}{\ln(1+3x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x^2}{3x}=\frac{1}{6}。$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}=0。$$

(3) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}。$$

(4) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}=1。$$

(5) $$\lim_{x\to\alpha}\frac{a^x-a^\alpha}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{a^\alpha(a^{x-\alpha}-1)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{a^\alpha(x-\alpha)\ln a}{x-\alpha}=a^\alpha\ln a。$$

(6) $$\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^\alpha\left(e^{\alpha\ln\frac{x}{a}}-1\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^\alpha\alpha\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{a^\alpha\alpha\cdot\frac{x-a}{a}}{x-a}=\alpha a^{\alpha-1}。$$

(7) $$\lim_{x\to+\infty}x\left(\ln(1+x)-\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1。$$

(8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(1+\dfrac{x-a}{a})}{x-a}=\dfrac{1}{a}$。

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(x+\mathrm{e}^{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x+\mathrm{e}^{x}-1)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^{2}$。

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-(1-\cos x)-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-1}$。

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}n\,(\sqrt[n]{x}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}n(e^{\frac{1}{n}\ln x}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot\dfrac{1}{n}\ln x)=\ln x$。

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[(e^{\frac{1}{n}\ln x}-1)-(e^{\frac{1}{n+1}\ln x}-1)\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^2\ln x\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=\ln x$。

习　题 3.4　闭区间上的连续函数

1. 证明：设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$（有限数），则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有界。

证 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$（有限数），可知 $\exists X > a$，$\forall x > X$：$|f(x)-A|<1$，即 $A-1<f(x)<A+1$。再由 $f(x)$ 在闭区间 $[a,X]$ 上的连续性，可知 $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上有界，即 $\forall x\in[a,X]$：$|f(x)|<B$。令 $M=\max\{B,A+1\}$，$m=\min\{-B,A-1\}$，则 $\forall x\in[a,+\infty)$，成立 $m<f(x)<M$。

2. 证明：若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续，且 $f(a+)$ 和 $f(b-)$ 存在，则它可取到介于 $f(a+)$ 和 $f(b-)$ 之间的一切中间值。

证 令

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(a,b) \\ f(a+) & x=a \\ f(b-) & x=b \end{cases},$$

则 $\tilde{f}(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，不妨设 $f(a+)<f(b-)$，由闭区间上连续函数的中间值定理，可知 $\tilde{f}(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可取到 $[f(a+),f(b-)]$ 上的一切值，于是 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可取到介于 $f(a+)$ 和 $f(b-)$ 之间的一切中间值。

3. 证明：若闭区间 $[a,b]$ 上的单调有界函数 $f(x)$ 能取到 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一切值，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数。

证 采用反证法。不妨设 $f(x)$ 单调增加。若 $\xi\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的不连续点，则 $f(\xi-)$ 与 $f(\xi+)$ 都存在，且 $f(a)\le f(\xi-)<f(\xi+)\le f(b)$，于是 $f(x)$ 取不到开区间 $(f(\xi-),f(\xi+))$ 中异于 $f(\xi)$ 的值，与条件矛盾；若 $x=a$ 是 $f(x)$ 的

不连续点，则 $f(a+)$ 存在，且 $f(a) < f(a+) \le f(b)$，于是 $f(x)$ 取不到开区间 $(f(a), f(a+))$ 中的值，也与条件矛盾；同样可以证明 $x = b$ 也不可能是 $f(x)$ 的不连续点。

4. 应用 Bolzano-Weierstrass 定理证明闭区间上连续函数的有界性定理。

证 采用反证法。设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，但无界，则存在点列 $\{x_n\}$，$x_n \in [a,b]$，满足 $|f(x_n)| > n$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$。由 Bolzano-Weierstrass 定理，存在子列 $\{x_{n_k}\}$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$，且 $\xi \in [a,b]$。因为 $f(x)$ 在点 ξ 连续，所以有 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$，与 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ 产生矛盾。

5. 应用闭区间套定理证明零点存在定理。

证 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b) < 0$，不妨设 $a = a_1$，$b = b_1$，$f(a) < 0$，$f(b) > 0$。

如果 $f(\frac{a_1 + b_1}{2}) = 0$，则定理得证。如果 $f(\frac{a_1 + b_1}{2}) < 0$，则令 $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$，$b_2 = b_1$；如果 $f(\frac{a_1 + b_1}{2}) > 0$，则令 $a_2 = a_1$，$b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$。

如果 $f(\frac{a_2 + b_2}{2}) = 0$，则定理得证。如果 $f(\frac{a_2 + b_2}{2}) < 0$，则令 $a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$，$b_3 = b_2$；如果 $f(\frac{a_2 + b_2}{2}) > 0$，则令 $a_3 = a_2$，$b_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$。

$\cdots\cdots$,

这样的过程可以一直进行下去。如果存在某个 k，使得 $f(\frac{a_k + b_k}{2}) = 0$，则定理得证；如果不存在某个 k，使得 $f(\frac{a_k + b_k}{2}) = 0$，则得到一个闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$，满足 $f(a_n) < 0$，$f(b_n) > 0$。由闭区间套定理，可知存

在唯一属于所有闭区间$[a_n,b_n]$的点ξ，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\xi$。再由$f(x)$在点$\xi$的连续性，可知$f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)\le 0$与$f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)\ge 0$，从而得到$f(\xi)=0$，定理得证。

6. 证明方程$x=a\sin x+b$（$a,b>0$）至少有一个正根。

证　令$f(x)=x-a\sin x-b$，则$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续。取$A>a+b$，则$f(0)<0$，$f(A)>0$，由零点存在定理，$f(x)$在$(0,A)$上至少有一个根。

7．证明方程$x^3+px+q=0$（$p>0$）有且仅有一个实根。

证　令$f(x)=x^3+px+q$，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是严格单调增加的。由$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，易知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有且仅有一个实根。

8．证明：

（1）$\sin\frac{1}{x}$在（0,1）上不一致连续，但在$(a,1)(a>0)$上一致连续；

（2）$\sin x^2$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续，但在$[0,A]$上一致连续；

（3）$\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续；

（4）$\ln x$在$[1,+\infty)$上一致连续；

(5) $\cos\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续。

证（1）在$(0,1)$上，令$x_n'=\frac{1}{n\pi}$，$x_n''=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$，$x_n'-x_n''\to 0$，但$\left|\sin\frac{1}{x_n'}-\sin\frac{1}{x_n''}\right|=1$，所以$\sin\frac{1}{x}$在（0,1）上不一致连续。

在$(a,1)$ $(a>0)$上，$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=a^2\varepsilon>0$，$\forall x_1,x_2\in(a,1)$，$|x_1-x_2|<\delta$，成立

$$\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|\le\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|\le\frac{|x_1-x_2|}{a^2}<\varepsilon,$$

所以 $\sin\frac{1}{x}$ 在$(a,1)$ $(a>0)$上一致连续。

（2）在$(-\infty,+\infty)$上，令 $x_n' = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}$， $x_n'' = \sqrt{n\pi}$，则 $x_n' - x_n'' \to 0$，但

$$\left|\sin\left(x_n'\right)^2 - \sin\left(x_n''\right)^2\right| = 1,$$

所以 $\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续。

在$[0,A]$上，$\forall\varepsilon > 0$，取$\delta = \frac{\varepsilon}{2A} > 0$， $\forall x_1, x_2 \in [0,A]$，$|x_1 - x_2| < \delta$，成立

$$\left|\sin x_1^2 - \sin x_2^2\right| \le \left|x_1^2 - x_2^2\right| \le 2A|x_1 - x_2| < \varepsilon,$$

所以 $\sin x^2$ 在$[0,A]$上一致连续。

（3） $\forall\varepsilon > 0$，取$\delta = \varepsilon^2 > 0$， $\forall x_1, x_2 \in [0,+\infty)$，$|x_1 - x_2| < \delta$，成立

$$\left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| \le \sqrt{|x_1 - x_2|} < \varepsilon,$$

所以$\sqrt{x}$ 在$[0,+\infty)$ 上一致连续。

（4） $\forall\varepsilon > 0$，取$\delta = \varepsilon > 0$， $\forall x_1, x_2 \in [1,+\infty)$， $0 \le x_1 - x_2 < \delta$，成立

$$|\ln x_1 - \ln x_2| = \left|\ln\left(1 + \frac{x_1 - x_2}{x_2}\right)\right| \le |x_1 - x_2| < \varepsilon,$$

所以 $\ln x$ 在$[1,+\infty)$上一致连续。

（5） $\forall\varepsilon > 0$，取$\delta = \varepsilon^2 > 0$， $\forall x_1, x_2 \in [0,+\infty)$，$|x_1 - x_2| < \delta$，成立

$$\left|\cos\sqrt{x_1} - \cos\sqrt{x_2}\right| \le \left|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right| \le \sqrt{|x_1 - x_2|} < \varepsilon,$$

所以$\cos\sqrt{x}$ 在$[0,+\infty)$ 上一致连续。

9．证明：对椭圆内的任意一点 P，存在椭圆过 P 的一条弦，使得 P 是该弦的中点。

证 过P点作弦，设弦与x轴的夹角为θ，P点将弦分成长度为$l_1(\theta)$和$l_2(\theta)$的两线段，则 $f(\theta) = l_1(\theta) - l_2(\theta)$ 在$[0,\pi]$连续，满足 $f(0) = -f(\pi)$，于

是必有$\theta_0 \in [0,\pi]$，满足 $f(\theta_0)=0$，也就是$l_1(\theta_0)=l_2(\theta_0)$。

10．设函数 $f(x)$ 在[0,2]上连续，且 $f(0) = f(2)$，证明：存在 $x, y \in [0,2]$，$y - x = 1$，使得 $f(x) = f(y)$。

证 令$F(x) = f(x+1) - f(x)$，则$F(x)$在$[0,1]$上连续，$F(1) = -F(0)$，于是必有$x_0 \in [0,1]$，满足$F(x_0) = 0$。令$y_0 = x_0 + 1$，则$x_0, y_0 \in [0,2]$，$y_0 - x_0 = 1$，使得 $f(x_0) = f(y_0)$。

11．若函数 $f(x)$ 在有限开区间(a,b)上一致连续，则 $f(x)$ 在(a,b)上有界。

证 由 $f(x)$ 在(a,b)上一致连续，可知 $f(a+)$，$f(b-)$存在且有限。令

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a,b) \\ f(a+) & x = a \\ f(b-) & x = b \end{cases},$$

则 $\tilde{f}(x)$ 在闭区间$[a,b]$连续，所以 $\tilde{f}(x)$ 在$[a,b]$有界，因此 $f(x)$ 在(a,b)上有界。

12．证明：

（1）某区间上两个一致连续函数之和必定一致连续；

（2）某区间上两个一致连续函数之积不一定一致连续。

证（1）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间I 上一致连续，则$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall x', x'' \in I$，$|x' - x''| < \delta$，成立$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$，$|g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$，于是

$$|[f(x') + g(x')] - [f(x'') + g(x'')]| < \varepsilon,$$

所以 $f(x) + g(x)$ 在区间I 上一致连续。

（2）设 $f(x) = g(x) = x$，区间$I = [0,+\infty)$，则 $f(x)$，$g(x)$ 在区间I 上一致连续，但 $f(x)g(x) = x^2$ 在区间I 上不一致连续。

13. 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(x) \neq 0, x \in [a,b]$，证明 $f(x)$ 在$[a,b]$上

恒正或恒负。

证 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不保持定号，则存在 $x', x''\in[a,b]$（不妨设 $x'<x''$），使 $f(x')$ 与 $f(x'')$ 不同号，由闭区间上连续函数的中间值定理，必定存在 $\xi\in[x',x'']$，使得 $f(\xi)=0$，这就产生矛盾，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定恒正或恒负。

14．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a\le x_1<x_2<\cdots<x_n\le b$，证明在 $[a,b]$ 中必有 ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]。$$

证 根据闭区间上连续函数的中间值定理，闭区间上连续函数一定能取到最大值和最小值之间任何一个值。由于

$$\min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}\le\frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right]\le\max_{x\in[a,b]}\{f(x)\},$$

所以在 $[a,b]$ 中必有 ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]。$$

15．若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(有限数)，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

证 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\forall\varepsilon>0,\exists X>a,\forall x',x''>X:\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。由于 $f(x)$ 在 $[a,X+1]$ 连续，所以一致连续，也就是

$\exists 0<\delta<1,\forall x',x''\in[a,X+1](|x'-x''|<\delta):\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。于是

$\forall x',x''\in[a,+\infty)(|x'-x''|<\delta):\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。