第十四章 曲线积分、曲面积分与场论

习 题 14.1 第一类曲线积分与第一类曲面积分

1. 求下列第一类曲线积分：

(1) $\int\limits_{L}(x+y)ds$，其中L是以$O(0,0), A(1,0), B(0,1)$为顶点的三角形；

(2) $\int\limits_{L}|y|ds$，其中L为单位圆周$x^2+y^2=1$；

(3) $\int\limits_{L}|x|^{1/3}ds$，其中L为星形线$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$；

(4) $\int\limits_{L}|x|ds$，其中L为双纽线$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$；

(5) $\int\limits_{L}(x^2+y^2+z^2)ds$，L为螺旋线

$x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, 0\le t\le 2\pi$的一段；

(6) $\int\limits_{L}xyzds$。其中L为曲线$x=t,\ y=\dfrac{2\sqrt{2t^3}}{3},\ z=\dfrac{1}{2}t^2$上相应于$t$从 0 变到 1 的一段弧；

(7) $\int\limits_{L}(xy+yz+zx)ds$，其中L为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$和平面

$x+y+z=0$的交线。

解（1） $\int\limits_{L}(x+y)ds=\int\limits_{OA}(x+y)ds+\int\limits_{AB}(x+y)ds+\int\limits_{BO}(x+y)ds$

$$=\int_0^1 xdx+\int_0^1(x+x)\sqrt{2}dx+\int_0^1 ydy=1+\sqrt{2}\text{。}$$

（2） $\int\limits_{L}|y|ds=\int_0^{2\pi}|\sin t|dt=4$。

（3）令 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$，则 $ds=3a|\sin t\cos t|$，于是

$$\int\limits_{L}|x|^{\frac{1}{3}}ds=3a^{\frac{4}{3}}\int_0^{2\pi}|\sin t\cos^2 t|dt=12a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 tdt=4a^{\frac{4}{3}}\text{。}$$

（4）将L表示为参数方程 $\begin{cases}x=\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta\\ y=\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\end{cases}$，再利用对称性，就有

$$\int\limits_{L}|x|ds=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta\sqrt{x'^2+y'^2}d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta=2\sqrt{2}\text{。}$$

注 本题也可利用L的极坐标方程$r^2=\cos 2\theta$，得到

$$\int\limits_{L}|x|ds=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}r\cos\theta\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta=2\sqrt{2}\text{。}$$

（5） $\int_{\mathbf{L}}(x^2+y^2+z^2)ds$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}dt=\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}\text{。}$$

（6） $\int_{\mathbf{L}}xyzds=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}\sqrt{1+2t+t^2}dt=\frac{16\sqrt{2}}{143}$。

（7）因为在 **L** 上成立

$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)],$$

所以

$$\int_{\mathbf{L}}(xy+yz+zx)ds=-\frac{a^2}{2}\int_{\mathbf{L}}ds=-\pi a^3\text{。}$$

2. 求椭圆周 $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$ 的质量，已知曲线在点 $M(x,y)$ 处的线密度是 $\rho(x,y)=|y|$。

解　质量 $m=\int_L \rho ds=b\int_0^{2\pi}|\sin t|\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt$

$$=2b\int_0^{\pi}\sin t\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}dt$$

$$=\begin{cases}2b^2+\dfrac{2a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, & \text{当}a>b\\ 4a^2, & \text{当}a=b\\ 2b^2+\dfrac{2a^2b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\dfrac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}, & \text{当}a<b\end{cases}\text{。}$$

3. 求下列曲面的面积：

(1) $z=axy$ 包含在圆柱面 $x^2+y^2=a^2\quad(a>0)$ 内的部分；

(2) 锥面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$ 被平面 $x+y+z=2a\ \ (a>0)$ 所截的部分；

(3) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 内的部分；

(4) 圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被两平面 $x+z=0,\ x-z=0\ (x>0,\ y>0)$ 所截部分；

(5) 抛物面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy\ \ (a>0)$ 内的那部分；

(6) 环面 $\begin{cases}x=(b+a\cos\phi)\cos\varphi,\\ y=(b+a\cos\phi)\sin\varphi,\\ z=a\sin\phi,\end{cases}\quad 0\le\phi\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi$，其中 $0<a<b$。

解（1） $A=\iint_D\sqrt{1+a^2(x^2+y^2)}dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{1+a^2r^2}rdr=\frac{2\pi}{3a^2}(\sqrt{(1+a^4)^3}-1)\text{。}$$

（2）联立锥面与平面方程，消去z，得到

$$x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2，$$

这是所截的部分在xy平面上投影区域的边界，它是个椭圆。记

$$D=\left\{(x,y)\middle|(x^2-xy+y^2)+2a(x+y)\le 2a^2\right\}，$$

再令$\begin{cases}x=u+v\\y=u-v\end{cases}$，则区域$D$与区域

$$D'=\left\{(u,v)\middle|(u+2a)^2+3v^2\le 6a^2\right\}$$

对应，且$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=2$，于是所截部分的面积为

$$A=\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\iint_D 2dxdy=\iint_{D'}4dudv=8\sqrt{3}\pi a^2。$$

（3）这部分球面在xy平面上的投影区域为 $D=\left\{(x,y)\middle|\ x^2+y^2\le\dfrac{a^2}{2}\right\}$，

于是

$$A=\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}rdr=(2-\sqrt{2})\pi a^2。$$

（4）圆柱面方程可写成$y=\sqrt{a^2-x^2}$，区域$D=\left\{(z,x)\middle|-x\le z\le x,0\le x\le a\right\}$，于是

$$A=\iint_D\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dzdx=\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dzdx=\int_0^a dx\int_{-x}^{x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dz=2a^2。$$

（5）方程$(x^2+y^2)^2=2a^2xy$可化为极坐标方程$r^2=a^2\sin 2\theta$，于是

$$A=2\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=2\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2}}dxdy$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}\sqrt{a^2+r^2}\,rdr=\frac{2}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(\sin\theta+\cos\theta)^3-1]d\theta$$

$$=\frac{1}{9}(20-3\pi)a^2。$$

（6）由

$$x_\phi'=-a\sin\phi\cos\varphi,y_\phi'=-a\sin\phi\sin\varphi,z_\phi'=a\cos\phi，$$

$$x_\varphi'=-(b+a\cos\phi)\sin\varphi,y_\varphi'=(b+a\cos\phi)\cos\varphi,z_\varphi'=0，$$

可得

$$E=a^2,G=(b+a\cos\phi)^2,F=0，$$

所以

$$A=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,d\phi d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}a(b+a\cos\phi)d\phi=4\pi^2ab。$$

4. 求下列第一类曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中Σ是左半球面$x^2+y^2+z^2=a^2$， $y\le 0$ ；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中Σ是区域$\{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$的边界；

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$，Σ是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$所截部分；

(4) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dS$，其中Σ是圆柱面$x^2+y^2=a^2$介于平面$z=0$与$z=H$之间的部分；

(5) $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)dS$，其中Σ是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$ ；

(6) $\iint\limits_{\Sigma}\left(x^3+y^2+z\right)dS$，其中Σ是抛物面$2z=x^2+y^2$介于平面$z=0$与$z=8$之间的部分；

(7) $\iint\limits_{\Sigma}zdS$，其中Σ是螺旋面$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=v,\ 0\le u\le a$，$0\le v\le 2\pi$ 的一部分。

解（1）由对称性，

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=\iint\limits_{\Sigma}ydS=-\iint\limits_{\Sigma_{zx}}\sqrt{a^2-x^2-z^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}dzdx$$

$$=-\pi a^3\text{。}$$

（2）设$\Sigma_1:z=\sqrt{x^2+y^2},\Sigma_2:z=1\ (x^2+y^2\le 1)$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dS+\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2)dS$$

$$=(1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi\text{。}$$

（3） $$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS=\iint\limits_{\Sigma_{xy}}[xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}]\sqrt{2}dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta+\cos\theta+\sin\theta)d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3dr$$

$$=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4\text{。}$$

（4）设$\Sigma_1:x=\sqrt{a^2-y^2},\Sigma_2:x=-\sqrt{a^2-y^2}\ (0\le z\le H)$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dS=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dS+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dS$$

$$=2\iint\limits_{\Sigma_{yz}}\frac{1}{a^2+z^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}dydz$$

$$=2\int_0^H \frac{adz}{a^2+z^2}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}dy=2\pi\arctan\frac{H}{a}\text{。}$$

（5）由对称性，有 $\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\iint\limits_{\Sigma}y^2dS=\iint\limits_{\Sigma}z^2dS$，又由于

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\iint\limits_{\Sigma}a^2dS=4\pi a^4，$$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)dS=\frac{13}{12}\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\frac{13}{9}\pi a^4\text{。}$$

（6）由对称性，有 $\iint\limits_{\Sigma}x^3dS=0$， $\iint\limits_{\Sigma}y^2dS=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，再由 $\iint\limits_{\Sigma}zdS=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，得到

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(x^3+y^2+z\right)dS=\iint\limits_{\Sigma_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4\sqrt{1+r^2}r^3dr=\pi\int_0^4\left((1+r^2)^{\frac{3}{2}}-(1+r^2)^{\frac{1}{2}}\right)d(1+r^2)$$

$$=\frac{1564\sqrt{17}+4}{15}\pi\text{。}$$

（7）由 $x'_u=\cos v, y'_u=\sin v, z'_u=0, x'_v=-u\sin v, y'_v=u\cos v, z'_v=1$，得到

$$E=1, G=1+u^2, F=0\text{。}$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}zdS=\iint\limits_{D}v\sqrt{1+u^2}dudv=\int_0^{2\pi}vdv\int_0^a\sqrt{1+u^2}du$$

$$=\pi^2[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})]\text{。}$$

5．设球面 Σ 的半径为 R，球心在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上。问当 R 何值时，Σ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部的面积最大？并求该最大面积。

解　不妨设 Σ 的球心在 $(0,0,a)$，于是 Σ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部的曲面方程为

$$z=a-\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\text{。}$$

将此方程与球面方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 联立，解得 $z=\frac{2a^2-R^2}{2a}$，这样，Σ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部的部分在 Oxy 平面上的投影为

$$D=\left\{(x,y)\middle|\ x^2+y^2\le R^2-\frac{R^4}{4a^2}\right\}，$$

从而面积为

$$S(R)=\iint\limits_{D}\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}dxdy=\iint\limits_{D}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{R\sqrt{1-\frac{R^2}{4a^2}}}\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}rdr=2\pi R^2(1-\frac{R}{2a})。$$

对$S(R)$求导，得

$$S'(R)=\frac{\pi}{a}(4aR-3R^2)，$$

令$S'(R)=0$，得到$R=\frac{4}{3}a$。由于$S''(\frac{4}{3}a)=-2\pi<0$，所以当$R=\frac{4}{3}a$时，面积最大，面积最大值为

$$S_{\max}=\frac{32}{27}\pi a^3。$$

6. 求密度为$\rho(x,y)=z$的抛物面壳$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2), 0\le z\le 1$的质量与重心。

解　质量$M=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y)dS=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+r^2}dr^2=\frac{12\sqrt{3}+2}{15}\pi。$$

设重心坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性，$\bar{x}=0,\bar{y}=0$。

$$\iint\limits_{\Sigma}z\rho(x,y)dS=\frac{1}{4}\iint\limits_{\Sigma_{xy}}(x^2+y^2)^2\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^5\sqrt{1+r^2}dr=\frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}}r^4\sqrt{1+r^2}dr^2，$$

作代换 $t=\sqrt{1+r^2}$，得到

$$\iint\limits_{\Sigma}z\rho(x,y)dS=\frac{\pi}{4}\int_1^{\sqrt{3}}2(t^2-1)^2t^2dt=\frac{66\sqrt{3}-4}{105}\pi，$$

于是

$$\bar{z}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}z\rho(x,y)dS}{M}=\frac{596-45\sqrt{3}}{749}，$$

所以重心为$(0,0,\frac{596-45\sqrt{3}}{749})$。

7. 求均匀球面（半径是a，密度是 1）对不在该球面上的质点（质量为 1）的引力。

解　设球面方程为$x^2+y^2+z^2=a^2$，质点的坐标为$(0,0,b)$ $(0\le b\ne a)$。在球面上(x,y,z)处取一微元，面积为dS，它对质点的引力为

$$dF=\frac{GdS}{x^2+y^2+(z-b)^2}。$$

由对称性，$F_x=F_y=0$，

$$F_z=\iint\limits_{\Sigma}\frac{G(z-b)}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{\frac{3}{2}}}dS。$$

令$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\theta \\ z = a\cos\varphi \end{cases}$，得到$\sqrt{EG-F^2} = a^2\sin\varphi$，于是

$$F_z = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \frac{G(a\cos\varphi - b)a^2\sin\varphi}{(a^2+b^2-2ab\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi，$$

在上述积分中，再令$t = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}$，得到

$$F_z = -\frac{\pi G a}{b^2}\int_{|a-b|}^{a+b} \frac{b^2-a^2+t^2}{t^2} dt = \begin{cases} 0, & b<a \\ -\dfrac{4\pi G a^2}{b^2}, & b>a \end{cases}，$$

所以当$b<a$时，引力$\mathbf{F} = (0,0,0)$；当$b>a$时，引力$\mathbf{F} = (0,0,-\dfrac{4\pi G a^2}{b^2})$。

8．设$u(x,y,z)$为连续函数，它在$M(x_0,y_0,z_0)$处有连续的二阶导数。记Σ为以M点为中心，半径为R的球面，以及

$$T(R) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma} u(x,y,z)dS。$$

（1）证明：$\lim\limits_{R\to 0} T(R) = u(x_0,y_0,z_0)$；

（2）若$\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)} \neq 0$，求当$R\to 0$时无穷小量$T(R)-u(x_0,y_0,z_0)$的主要部分。

解（1）由于$u(x,y,z)$在$M(x_0,y_0,z_0)$处连续，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta$时，成立

$$|u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0)|<\varepsilon。$$

于是当$R = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta$时，

$$\left|\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma} u(x,y,z)dS - u(x_0,y_0,z_0)\right| \le \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma} |u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0)|dS < \varepsilon，$$

所以成立

$$\lim_{R\to 0} T(R) = u(x_0,y_0,z_0)。$$

（2）令$\begin{cases} x = x_0 + R\xi \\ y = y_0 + R\eta \\ z = z_0 + R\varsigma \end{cases}$，则

$$T(R) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma^*} u(x_0+R\xi, y_0+R\eta, z_0+R\varsigma)dS，$$

其中$\Sigma^* = \{(\xi,\eta,\varsigma) \mid \xi^2+\eta^2+\varsigma^2 = 1\}$。利用对称性，有

$$\iint_{\Sigma^*} \xi dS = \iint_{\Sigma^*} \eta dS = \iint_{\Sigma^*} \varsigma\, dS = 0，$$

$$\iint_{\Sigma^*}\xi\eta dS=\iint_{\Sigma^*}\eta\varsigma\, dS=\iint_{\Sigma^*}\varsigma\,\xi dS=0，$$

$$\iint_{\Sigma^*}\xi^2 dS=\iint_{\Sigma^*}\eta^2 dS=\iint_{\Sigma^*}\varsigma^2\, dS=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma^*}(\xi^2+\eta^2+\varsigma^2)dS=\frac{4}{3}\pi。$$

由于

$$T'(R)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma^*}[\xi u'_x+\eta u'_y+\varsigma u'_z]dS，$$

$$T''(R)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma^*}[\xi^2 u''_{xx}+\eta^2 u''_{yy}+\varsigma^2 u''_{zz}+2(\xi\eta u''_{xy}+\xi\varsigma u''_{xz}+\eta\varsigma u''_{yz})]dS，$$

以$R=0$代入，得到

$$T'(0)=0$$

$$T''(0)=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}。$$

由 Taylor 公式，即知当$R\to 0$时，无穷小量$T(R)-u(x_0,y_0,z_0)$的主要部分为 $\frac{R^2}{6}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$。

9．设Σ为上半椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$（$z\ge 0$），$\pi$为$\Sigma$在点$P(x,y,z)$处的切平面，$\rho(x,y,z)$为原点$O(0,0,0)$到平面$\pi$的距离，求$\iint_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS$。

解　因为椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$在$P(x,y,z)$点的法向量为$\vec{n}=(x,y,2z)$，所以切平面$\pi$的方程为

$$xX+yY+2zZ=2，$$

从而原点到π的距离为

$$\rho(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}。$$

令$\begin{cases} x=\sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta \\ z=\cos\varphi \end{cases}$，则$\sqrt{x^2+y^2+4z^2}=\sqrt{2\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi}$，由

$$x'_\varphi=\sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta,\ y'_\varphi=\sqrt{2}\cos\varphi\sin\theta,\ z'_\varphi=-\sin\varphi,$$

$$x'_\theta=-\sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta,\ y'_\theta=\sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta,\ z'_\theta=0,$$

得到

$$\sqrt{EG-F^2}=\sin\varphi\sqrt{2\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi},$$

由此得到

$$\iint\limits_\Sigma \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi(\sin^2\varphi+2\cos^2\varphi)d\varphi=\frac{3}{2}\pi。$$

注 本题也可由Σ：$z=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2-y^2}$投影到$xy$平面上来计算得到

$$\iint\limits_\Sigma \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS=\frac{1}{4}\iint\limits_{D_{xy}}(4-x^2-y^2)dxdy=\frac{3}{2}\pi。$$

10．设Σ是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$。证明

$$\iint\limits_\Sigma f(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du,$$

其中a,b,c为不全为零的常数，$f(u)$是$|u|\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}$上的一元连续函数。

证 将$xyz-$坐标系保持原点不动旋转成$x'y'z'-$坐标系，使z'轴上的单位向量为$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$，由于旋转变换是正交变换，保持度量不变，所以球面$\Sigma$上的面积元$dS$也不变。设球面$\Sigma$上一点$(x,y,z)$的新坐标为$(x',y',z')$，则$ax+by+cz=\sqrt{a^2+b^2+c^2}z'$，于是

$$\iint\limits_\Sigma f(ax+by+cz)dS=\iint\limits_\Sigma f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}z')dS。$$

下面计算这一曲面积分。令球面Σ的参数方程为

$$x'=\sin\varphi\cos\theta,\quad y'=\sin\varphi\sin\theta,\quad z'=\cos\varphi,$$

则

$$\sqrt{EG-F^2}=\sin\varphi,$$

所以

$$\iint\limits_\Sigma f(ax+by+cz)dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du \text{。}$$

11．设有一高度为$h(t)$（t为时间）的雪堆在溶化过程中，其侧面满足方程（设长度单位为 cm，时间单位为 h）

$$z = h(t) - \frac{2(x^2+y^2)}{h(t)} \text{。}$$

已知体积减少的速率与侧面积成正比（比例系数 0.9）。问高度为 130cm 的雪堆全部融化需多少时间？

解　雪堆的体积为

$$V(t) = \iint\limits_D \left(h(t) - \frac{2(x^2+y^2)}{h(t)} \right) dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \left(h(t) - \frac{2}{h(t)} r^2 \right) rdr = \frac{\pi}{4} h^3(t) \text{，}$$

雪堆的侧面积为

$$S(t) = \iint\limits_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dxdy = \frac{1}{h(t)} \iint\limits_D \sqrt{h^2(t) + 16(x^2+y^2)}\, dxdy$$

$$= \frac{1}{h(t)} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \sqrt{h^2(t) + 16r^2}\, rdr = \frac{13}{12} \pi h^2(t) \text{。}$$

由 $\frac{dV}{dt} = -\frac{9}{10} S(t)$，得到$h'(t) = -\frac{13}{10}$，注意到 $h(0) = 130\,(cm)$，得到

$$h(t) = 130 - \frac{13}{10} t \text{。}$$

因为当雪堆全部融化即$h(t) = 0$时，有$t = 100\,(h)$，所以雪堆全部融化需 100 小时。