习题　16.4　Fourier 变换和 Fourier 积分

1．求下列定义在$(-\infty,+\infty)$的函数的 Fourier 变换：

（1）　$f(x)=\begin{cases}A, & 0<x<\delta,\\ 0, & 其它;\end{cases}$　　（2）　$f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}$，　$a>0$；

（3）　$f(x)=\mathrm{e}^{-ax^2}$，　$a>0$；　　（4）　$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

（5）　$f(x)=\begin{cases}A\cos\omega_0 x, & |x|\le\delta,\\ 0, & |x|>\delta;\end{cases}$　$\omega_0\neq 0$是常数，$\delta=\dfrac{\pi}{\omega_0}$。

解　（1）　$\tilde{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_0^{\delta}Ae^{-i\omega x}dx=\dfrac{A}{i\omega}(1-e^{-i\omega\delta})$。

（2）　$\tilde{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-(a+i\omega)x}dx+\int_{-\infty}^{0}e^{(a-i\omega)x}dx$

$$=\frac{1}{a+i\omega}+\frac{1}{a-i\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}。$$

（3）　$\tilde{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}\cos\omega x dx$

$$=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos\frac{\omega t}{\sqrt{a}}d\frac{t}{\sqrt{a}}$$　（利用例 15.2.8 的结果）

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\left(\frac{\omega}{2\sqrt{a}}\right)^2}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}。$$

（4）　$\tilde{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-(2+i\omega)x}dx=\dfrac{1}{2+i\omega}$。

（5）　$\tilde{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\delta}^{\delta}A\cos\omega_0 xe^{-i\omega x}dx$

$=\int_{-\delta}^{\delta}A\cos\omega_0 x\cos\omega x dx$（虚部为奇函数，积分为 0）

$$=\frac{A}{2}\int_{-\delta}^{\delta}[\cos(\omega_0-\omega)x+\cos(\omega_0+\omega)x]dx$$

$$=A\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)\delta}{(\omega-\omega_0)}+\frac{\sin(\omega+\omega_0)\delta}{(\omega+\omega_0)}\right]。$$

2．求$f(x)=\mathrm{e}^{-ax}$（$x\in[0,+\infty)$，$a>0$）的正弦变换和余弦变换。

解　正弦变换：

$$\tilde{f}(\omega)=\int_0^{+\infty}f(x)\sin\omega x dx=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin\omega x dx=\frac{\omega}{a^2+\omega^2}，$$

余弦变换：

$$\tilde{f}(\omega)=\int_0^{+\infty} f(x)\cos\omega x dx=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos\omega x dx=\frac{a}{a^2+\omega^2}$$。

3．设 $f_1(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases} \sin x, & 0\le x\le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & 其它, \end{cases}$ 求 $f_1 * f_2(x)$。

解　记 $F(x)= f_1 * f_2(x)= f_2 * f_1(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t) f_1(x-t)dt$，考虑 $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

当 $x\le 0$ 时，$f_1(x-t)=0$，所以 $F(x)=0$；

当 $x>\frac{\pi}{2}$ 时，$f_1(x-t)=e^{-(x-t)}$，所以

$$F(x)=e^{-x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\sin(t)dt=\frac{1}{2}e^{-x}(1+e^{\frac{\pi}{2}})$$；

当 $0<x\le\frac{\pi}{2}$ 时，$f_1(x-t)=\begin{cases} e^{-(x-t)}, & x>t \\ 0, & x\le t \end{cases}$，所以

$$F(x)=e^{-x}\int_0^{x} e^t\sin(t)dt=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x+e^{-x})$$。

于是

$$f_1 * f_2(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \frac{1}{2}(\sin x-\cos x+e^{-x}), & 0<x\le\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}e^{-x}(1+e^{\frac{\pi}{2}}), & x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

习题 16.5 快速 Fourier 变换

1． 说明离散 Fourier 变换 $X(j)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{nj}{N}}$ 可以看成 Fourier 变换

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-i\omega x}dx$$

的离散近似形式的推广。

解 假设 $\omega>0$

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{\omega x}{2\pi}}dx \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n\Delta x)\mathrm{e}^{-2\pi i(\frac{\omega n\Delta x}{2\pi})}\Delta x\ ,$$

取 Δx 使 $\frac{\omega\Delta x}{2\pi}=\frac{1}{N}$，记 $W=\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{N}}$，则 k 为整数时，$W^{kN+n}=W^n$。于是

$$\hat{f}(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}W^n\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f((kN+n)\Delta x)\Delta x\ ,$$

记 $x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f((kN+n)\Delta x)\Delta x$，所以

$$X(j)=\hat{f}(j\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}W^{jn}x(n)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{nj}{N}}\ 。$$

2． 证明正交关系式

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{nj}{N}}\mathrm{e}^{2\pi i\frac{nk}{N}}=\delta_{j,k}\ 。$$

解 显然，$j=k$ 时，$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{nk}{N}}\mathrm{e}^{2\pi i\frac{nk}{N}}=1$。

下面考虑 $j\neq k$，不妨设 $j<k$。根据当 $\xi\neq 1$ 是方程 $x^N=1$ 的一个根时，有 $\sum_{n=0}^{N-1}\xi^n=0$，令 $\xi=\mathrm{e}^{2\pi i\frac{(k-j)}{N}}\neq 1$，则 $\xi^N=\mathrm{e}^{2(k-j)\pi i}=1$。于是

$$\sum_{n=0}^{N-1}\xi^n=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{nj}{N}}\mathrm{e}^{2\pi i\frac{nk}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{2\pi i\frac{n(k-j)}{N}}=0\ 。$$

3． 设 $N=pq$（$p,q\in\mathbf{N}$），构造只需 $O((p+q)N)$ 次运算的 Fourier 变换

算法。

解　令$W=\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{N}}$，则$k$为整数时，$W^{kN+n}=W^n$。假设

$$j=j_1q+j_0,\quad j_1=0,1,\cdots,p-1,\ \ j_0=0,1,\cdots,q-1,$$

$$n=n_1p+n_0,\quad n_1=0,1,\cdots,q-1,\ \ n_0=0,1,\cdots,p-1。$$

$$X(j)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{nj}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{jn}$$

$$=\sum_{n_0=0}^{p-1}\sum_{n_1=0}^{q-1}x(n_1p+n_0)W^{j(n_1p+n_0)}$$

$$=\sum_{n_0=0}^{p-1}W^{jn_0}\sum_{n_1=0}^{q-1}x(n_1p+n_0)W^{n_1j_0p}。$$

固定j，计算$\sum_{n_1=0}^{q-1}x(n_1p+n_0)W^{n_1j_0p}$需要$q-1$次乘法（$n_1=0$不需要做乘法），对于相同的$j_0$，$\sum_{n_1=0}^{q-1}x(n_1p+n_0)W^{n_1j_0p}$是相同的，无需重复计算，所有此类和式共需$q(q-1)$次乘法。对$n_0$求和需要$(p-1)N$次乘法，所以，总共需要$q(q-1)+(p-1)N=O((p+q)N)$次乘法。

4．　对$N=2^3$，具体写出以 2 为底的 FFT 的计算流程。

解　记$W=\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{8}}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{4}}$，则$W^4=-1,W^8=1$。可得计算公式

$$X(j)=\sum_{n=0}^{7}x(n)W^{jn},\quad j=0,1,\cdots,7.$$

$$=[x(0)+(-1)^jx(4)]+W^j[x(1)+(-1)^jx(5)]$$

$$+W^{2j}\{[x(2)+(-1)^jx(6)]+W^j[x(3)+(-1)^jx(7)]\}。$$

计算流程

第一步：

$$x_1(i)=x(i)+x(i+4),$$
$$x_1(i+4)=W^i[x(i)-x(i+4)],i=0,1,2,3.$$

第二步：

$$x_2(i) = x_1(i) + x_1(i+2),$$
$$x_2(i+2) = W^{2i}[x_1(i) - x_1(i+2)], i = 0,1,4,5.$$

第三步：

$$X(i) = x_2(i) + x_2(i+1),$$
$$X(i+4) = x_2(i) - x_2(i+1), i = 0,2,$$
$$X(i) = x_2(i+3) + x_2(i+4),$$
$$X(i+4) = x_2(i+3) - x_2(i+4), i = 1,3.$$

计 算 实 习 题

（在教师的指导下，编制程序在电子计算机上实际计算）

1. 利用现成的数学通用软件（如 MATLAB、Mathematica、Maple 等），对于 $N=32,64,128$ ：

   (1) 生成实数序列 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ ；

   (2) 用 FFT 计算 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 的离散 Fourier 变换序列 $\{X(j)\}_{j=0}^{N-1}$ ；

   (3) 作出 $\{x(k)\}$ 和 $\{|X(j)|\}$ 的图并进行分析（参见图 16.5.4）；

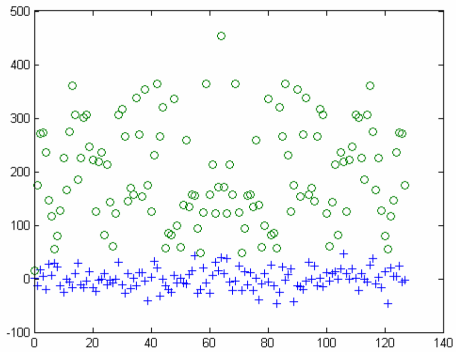
   (4) 设定 $\delta_0>0$ ，将 $\{|X(j)|\}$ 中满足 $|X(j)|<\delta_0$ 的数据全部置为零，再进行离散 Fourier 逆变换，将得到的数据与 $\{x(k)\}$ 比较；

   (5) 改变 δ_0 的值，重复(4)，分析不同的 δ_0 对逆变换所得到的数据的影响。

解　源程序为

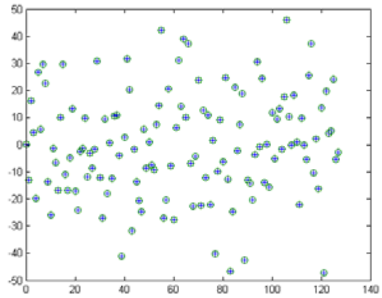
```
function ex1601(N)
t=0:N-1;
x=randn(N,1)*20;%randn
y=fft(x,N);
z=abs(y);
plot(t,x,'+',t,z,'o')
%
delta=input('请输入误差');
for i=0:N-1
    if z(i+1)<delta
        y(i+1)=0;
    end
end
z=real(ifft(y));
plot(t,x,'+',t,z,'o')
```

运行结果分析：以 N=128 为例。本程序数据是随机产生的，“ + ”为原始数据，“ o ”为变换后的模的数据。

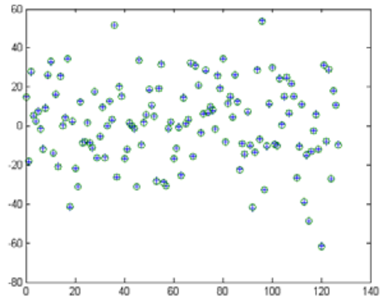


取 $\delta_0=5$ ，将 $\{|X(j)|\}$ 中满足 $|X(j)|<\delta_0$ 的数据全部置为零，再进行离散

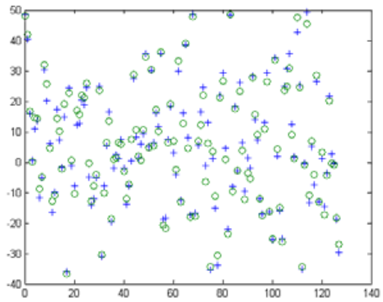
Fourier 逆变换。“ + ” 为原始数据，“ o ” 为置零后变换得到的数据，与$\{x(k)\}$比较几乎重合



取$\delta_0 = 50$，同样处理后得到的数据，与$\{x(k)\}$比较有些小误差。



取$\delta_0 = 100$，同样处理后得到的数据，与$\{x(k)\}$比较误差清晰可见，但不很大。



由于数据源不同，结果会有所差异。

2. 对于$N = 32, 64, 128$ ，
   (1) 产生两个实数序列 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 和$\{y(k)\}_{k=0}^{N-1}$ ；
   (2) 用直接方法计算 $\{x(k)\}$和$\{y(k)\}$的卷积$\{z(k)\}_{k=0}^{N-1}$；
   (3) 改用离散 Fourier 变换的思想，用 FFT 计算$\{z(k)\}$ ；
   (4) 结合N比较两种算法所用的时间。

解　源程序为

```
function t=ex1602(N)
x=randn(N,1)*20;%randn
y=randn(N,1)*20;%randn
tic %启动秒表
%z=conv(x,y);
```

```
for i=0:N-1
   z(i+1)=0;
   for j=0:i
      z(i+1)=z(i+1)+x(j+1)*y(i-j+1);
   end
   for j=i+1:N-1
      z(i+1)=z(i+1)+x(j+1)*y(N+i-j+1);
   end
end

t1=toc;%计时
tic;
x1=fft(x,N);
y1=fft(y,N);
z1=ifft(x1.*y1);
t2=toc;
t=[t1,t2];
```

分析：

计算所化时间与使用的计算机性能有关，由于计算机计时器的最小单位较大，对于较新的计算机，即使对于 N=128，所化时间几乎为 0。而且由于卷积采用代码解释执行速度较慢，Fourier 变换采用内部函数速度很快，用 FFT 计算速度要快得多。

3. 用 FFT 计算多项式 $\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 和 $\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ 的乘积，并与 $\frac{\sin 2x}{2}$ 的 Taylor 级数的相应项比较。

解　源程序为

```
function [z,maxerror]=ex1603(m);

% z:乘积，maxerror：最大误差，m：阶数

len=4*m+2;

a=zeros(len,1);%被乘式系数

a(2)=1;

for i=4:2:2*m+2

    a(i)=-1*a(i-2)/(i-2)/(i-1);

end
```

```
b=zeros(len,1);%乘式系数
b(1)=1;
for i=3:2:2*m+1
   b(i)=-1*b(i-2)/(i-2)/(i-1);
end
c=zeros(len,1);%乘积系数
c(2)=1;
for i=4:2:len
   c(i)=-4*c(i-2)/(i-1)/(i-2);
end

x=fft(a,len);%Fourier 变换
y=fft(b,len);%Fourier 变换
z1=x.*y;
z=ifft(z1);%Fourier 逆变换
maxerror=0;
for i=1:len
   e=abs(z(i)-c(i));
   if e>maxerror
      maxerror=e;
   end
end
```

计算结果误差分析：

m	误差
1	0.05
2	0.001587
3	2.756e-005
4	3.006e-007
5	2.248e-009
6	1.224e-011

随着 m 的增加，误差迅速减少。