习　题　5.3　Taylor 公式和插值多项式

1．由 Lagrange 中值定理知

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\theta(x)x},\quad 0<\theta(x)<1,$$

证明：$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=1/2$。

证　由 $\theta(x)=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$，取极限即得到

$$\lim_{x\to 0}\theta(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{1+x}}=(\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)})\cdot 1=\frac{1}{2}。$$

2．设 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n$，$(0<\theta<1)$，

且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$，证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$。

证　$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n$

$$=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)h^{n+1}+\circ(h^{n+1}),$$

于是

$$\theta\cdot\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)+\circ(1)。$$

令 $h\to 0$，得到

$$\lim_{h\to 0}\theta\cdot f^{(n+1)}(x)=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x),$$

再由 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$，两边消去 $f^{(n+1)}(x)$，即得到 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$。

3．设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，取结点为 $x=1$、1.728、2.744，求 $f(x)$ 的二次插值多项式 $p_2(x)$ 及其余项的表达式，并计算 $p_2(2)$（$\sqrt[3]{2}=1.2599210\cdots$）。

解 $f(1)=1, f(1.728)=1.2, f(2.744)=1.4$，由 Lagrange 插值公式

$$
\begin{aligned}
& f(x)\approx p_2(x) \\
& =1\cdot\frac{(x-1.728)(x-2.744)}{(1-1.728)(1-2.744)}+1.2\cdot\frac{(x-1)(x-2.744)}{(1.728-1)(1.728-2.744)}+1.4\cdot\frac{(x-1)(x-1.728)}{(2.744-1)(2.744-1.728)} \\
& \approx 0.7876(x-1.728)(x-2.744)-1.6224(x-1)(x-2.744)+0.7901(x-1)(x-1.728) \\
& =-0.04465x^2+0.3965x+0.6481\text{。}
\end{aligned}
$$

$f'''(x)=\dfrac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$， 余项 $r_2(x)=\dfrac{5}{81\xi^{\frac{8}{3}}}(x-1)(x-1.728)(x-2.744)$。

$p_2(2)\approx 1.2626$。

4．设 $f(x)=2^x$，取结点为 $x=-1$、0、1，求 $f(x)$ 的二次插值多项式 $p_2(x)$ 及其余项的表达式，并计算 $p_2\left(\dfrac{1}{3}\right)$。请与上题的计算结果相比较并分析产生差异的原因。

解 $f(-1)=0.5, f(0)=1, f(1)=2$，由 Lagrange 插值公式

$$
\begin{aligned}
& f(x)\approx p_2(x) \\
& =0.5\cdot\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}+1\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}+2\cdot\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} \\
& =0.25x(x-1)-(x-1)(x+1)+(x+1)x \\
& =0.25x^2+0.75x+1\text{。}
\end{aligned}
$$

$f'''(x)=\ln^3 2\cdot 2^x$， 余项 $r_n(x)=\dfrac{\ln^3 2}{6}2^{\xi}(x+1)x(x-1)$。

$p_2(\frac{1}{3})\approx 1.2778$。

与上题相比，本题误差较大的原因是 2 不在所取的三点 $x=-1$、0、1 之间，而上题 2 在所取的三点 $x=1$、1.728、2.744 之间，因而误差较小。

5．设 $f(x)$ 在若干个测量点处的函数值如下：

x	1.4	1.7	2.3	3.1

$f(x)$	65	58	44	36

试求 $f(2.8)$ 的近似值。

解　由 Lagrange 插值公式

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx p_3(x) \\
&= 65\cdot\frac{(x-1.7)(x-2.3)(x-3.1)}{(1.4-1.7)(1.4-2.3)(1.4-3.1)} + 58\cdot\frac{(x-1.4)(x-2.3)(x-3.1)}{(1.7-1.4)(1.7-2.3)(1.7-3.1)} \\
&+ 44\cdot\frac{(x-1.4)(x-1.7)(x-3.1)}{(2.3-1.4)(2.3-1.7)(2.3-3.1)} + 3.6\cdot\frac{(x-1.4)(x-1.7)(x-2.3)}{(3.1-1.4)(3.1-1.7)(3.1-2.3)},
\end{aligned}
$$

$f(2.8) \approx p_3(2.8) \approx 36.647$。

6．若 h 是小量，问如何选取常数 a、b、c，才能使得

$af(x+h)+bf(x)+cf(x-h)$ 与 $f''(x)$ 近似的阶最高？

解

$$
\begin{aligned}
& af(x+h)+bf(x)+cf(x-h) \\
&= a[f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2]+bf(x)+c[f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2]+o(h^2) \\
&= (a+b+c)f(x)+(a-c)f'(x)h+\frac{1}{2}(a+c)f''(x)h^2+o(h^2),
\end{aligned}
$$

得到方程组 $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=0 \\ a+c=2 \end{cases}$，解之得到 $a=c=1, b=-2$。

7．将插值条件取为 $n+1$ 个结点上的函数值和一阶导数值，即

$p_n(x)$ 满足

$$
\begin{cases} p_n(x_i) = f(x_i) \\ p_n'(x_i) = f'(x_i) \end{cases}, \qquad i = 0,1,2,\cdots,n
$$

的插值多项式称为 **Hermite** 插值多项式，在微分方程数值求解等研究领域中具有重要作用。它可以取为

$$
p_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\left[f(x_k)q_k^{(0)}(x) + f'(x_k)\,q_k^{(1)}(x)\right],
$$

这里，$\{q_k^{(0)}(x), q_k^{(1)}(x)\}_{k=0}^{n}$ 是满足条件

$$q_k^{(0)}(x_i)=\delta_{ik},\quad [q_k^{(0)}]'(x_i)=0,\qquad i,\ k=0,1,2,\cdots,n$$

和

$$q_k^{(1)}(x_i)=0,\quad [q_k^{(1)}]'(x_i)=\delta_{ik},\qquad i,\ k=0,1,2,\cdots,n$$

的基函数。试仿照 Lagrange 插值多项式的情况构造$\{q_k^{(0)}(x),q_k^{(1)}(x)\}_{k=0}^{n}$。

解　显然当$i\neq k$时，$q_k^{(0)}(x_i)=[q_k^{(0)}]'(x_i)=0,\ q_k^{(0)}(x_k)=1,[q_k^{(0)}]'(x_k)=0$，设$q_k^{(0)}(x)=\left[\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(\frac{x-x_i}{x_k-x_i})^2\right][1-c(x-x_k)]$，由$[q_k^{(0)}]'(x_k)=\sum_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{2}{x_k-x_i}-c=0$解出$c$，得到

$$q_k^{(0)}(x)=\left[\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(\frac{x-x_i}{x_k-x_i})^2\right][1-(\sum_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{2}{x_k-x_i})(x-x_k)],\quad k=0,1,2,\cdots,n\ ;$$

同理可得到

$$q_k^{(1)}(x)=\left[\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(\frac{x-x_i}{x_k-x_i})^2\right](x-x_k)\qquad k=0,1,2,\cdots,n\ 。$$